BIBLIOTECA MODERNA MONDADORI

volume 616-617

Biblioteca Civica Thiene
XII
101

SEZIONE: SCIENZA E TECNICA

Egmont Colerus

PICCOLA STORIA DELLA MATEMATICA

DA PITAGORA A HILBERT

GIULIO EINAUDI EDITORE

Egmont Colerus

PICCOLA STORIA DELLA MATEMATICA

DA PITAGORA A HILBERT

Traduzione di Spartaco Casavecchia

ARNOLDO MONDADORI EDITORE

510.09
COL.

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

EDIZIONE ECONOMICA SU LICENZA
DELLA GIULIO EINAUDI EDITORE
I EDIZIONE B.M.M. APRILE 1960

I

PITAGORA

Matematica e Scienza

Supponiamo di vivere nel sesto secolo avanti Cristo, e di possedere il dono dell'ubiquità e dell'invisibilità. Immaginiamo di poter viaggiare come su un tappeto magico, senza alcun itinerario prestabilito, guidati solo dalla nostra fantasia e dai nostri desideri, e cerchiamo di mettere in parole le visioni che ci si presentano.

Sulla terra dei Faraoni regna la pace. La tempesta dall'Oriente non ha ancora cominciato a infuriare; se non si prendono troppo sul serio le tortuose trattative diplomatiche coi persiani, nulla fa supporre che un uragano s'avvicini. E del resto chi dovrebbe prenderle sul serio? Nella storia d'Egitto quattro volte millenaria la diplomazia non ha mai riposato. E il paese se ne sta tranquillo in tutta la sua magnificenza, misterioso come la sua Sfinge.

Un anno dopo l'altro il Nilo inonda le campagne, distrugge col suo limo, apportatore di nuovi frutti, le divisioni accuratamente tracciate. Quando l'inondazione è passata, innumerevoli agrimensori s'affrettano a correre sul terreno fangoso, dove ancora guizzano i pesci e saltellano le rane, piantano picchetti, li uniscono con corde graduate, e fanno i loro calcoli. Calcolano giorno e notte, finché in breve tempo a ogni proprietario vengono ridati i suoi campi.

Imponenti costruzioni, nella loro maestosa immobilità, guardano dall'alto l'affaccendarsi di questa gente: piramidi a spigoli vivi, dalle grigie superfici lucide come specchi, coperte di geroglifici a vivaci colori.

Perché queste piramidi hanno una forma così inverosimilmente regolare e geometrica? Perché gli obelischi, i pilastri dei templi, le colonne, le scarpate dei canali, i granai, non la cedono in nulla alle piramidi in fatto di accuratezza di lavorazione?

Indagando qua e là riusciamo a scoprire il segreto: è l'abilità degli architetti, aiutati dagli agrimensori e dai geometri, i quali, consultando grossi rotoli di papiro, ne ricavano formule d'ogni genere e le applicano secondo il bisogno. Questi geometri conoscono metodi esatti per tracciare angoli retti; sanno che quando si costruisce con delle funi un triangolo che abbia lati di 3, 4 e 5 unità e si fissano con picchetti i punti d'incrocio di queste funi, si ha sempre un angolo rigorosamente retto all'intersezione dei lati 3 e 4. Ma queste sono nozioni elementari e perfino per i geometri egiziani risalgono a migliaia d'anni. Oggi si sa molto di più nella sacra terra di Kemi: si conosce un metodo che millenni più tardi verrà chiamato trigonometria, per lo meno un aspetto di questa scienza, cioè la funzione angolare della cotangente. Si sa, in breve, che l'ampiezza di un angolo acuto del triangolo rettangolo dipende dalle lunghezze dei cateti. Uno di questi cateti si chiama "pir-em-mus", e i greci, che hanno afferrata male questa parola, l'hanno fatta diventare "piramide". Ma ciò avvenne molto più tardi. Ora ci troviamo all'inizio del sesto secolo avanti Cristo ed è giustificata la nostra meraviglia non solo per gli splendidi edifici, ma anche per la ben ordinata amministrazione statale, per il fiorente commercio, per la scienza del diritto e delle finanze dell'antico Egitto.

Come si regolano i calcolatori che vediamo là, intorno al mucchio del frumento, per dividerlo rigorosamente tra i vari proprietari secondo quote determinate, prima ancora che la minima quantità sia pesata sulla bilancia? Anche per tale scopo hanno escogitato speciali sistemi, quella che chiamano "cubatura

dei mucchi", e non si spaventano di fronte ai piú complicati problemi di suddivisione. Regola di società, regola del tre, quelle che piú tardi verranno chiamate equazioni ad una incognita, qui sono per la prima volta impiegate al servizio dell'uomo. E su questa sacra terra c'è ancora dell'altro, in cui non possiamo addentrarci.

Sappiamo infatti di essere all'inizio di una corsa attraverso i millenni, e nessun incantesimo ci deve trattenere. Voliamo verso Oriente, poiché ci hanno raccontato mirabilia di quello che vi è da vedere, di quello che i caldei vi fanno già da diecine di secoli.

Anche il territorio compreso fra il Tigri e l'Eufrate, in quest'epoca dominato dai persiani, è un'antichissima sede di cultura. Sumeri e accadi, assiri e babilonesi qui hanno meditato, lottato, lavorato la terra, si sono distrutti e mescolati a vicenda, e tutti hanno lasciato incisi strani caratteri cuneiformi su tavolette di argilla. Ve ne sono dei magazzini pieni, e migliaia e migliaia di queste tavolette sono coperte di calcoli. Qui però tutta quest'aritmetica, eccetto alcune applicazioni pratiche d'indole finanziaria (esisteva perfino un'assicurazione sui trasporti!), non ha un fine utilitario, come in Egitto. In Babilonia e in tutta la Mesopotamia si rivolge lo sguardo al cielo. I caldei sono i migliori astronomi del mondo: calcolano le ecclissi di sole e di luna, determinano il calendario, hanno una conoscenza esatta degli angoli sotto i quali le stelle sorgono e tramontano e delle orbite dei pianeti. Praticano la trigonometria sferica sulla sfera cava del firmamento. Hanno diviso il circolo in 360 gradi, si servono di un sistema numerale basato sul 60 e sanno fare difficili calcoli con grosse cifre, perfino con numeri al quadrato e al cubo. Hanno forse rapporti coi loro vicini d'Oriente, gl'indiani, e con gli altri vicini piú remoti, i cinesi?

Ma non fantastichiamo. Sappiamo solo che gl'indiani

si dilettano dei numeri enormi e hanno parole speciali per numeri che confinano con l'inconcepibile. Nel loro antichissimo poema epico *Mahabarata* si parla di 24.10^{40} divinità e Gotamo Buddha avrebbe avuto 600.000 milioni di figli. Una leggenda popolare, che abbiamo udita sul mercato di Benares, narra che una volta, in un tempo assai remoto, ebbe luogo una battaglia di scimmie, alla quale presero parte 10^{40} di esse. Che numero vien fuori? Migliaia d'anni piú tardi si è calcolato che queste scimmie non troverebbero posto in una sfera cava di diametro uguale a quello del sistema solare (fino all'orbita di Nettuno). Questi antichi indiani sono credenti, iperbolici e fantasiosi; tuttavia, malgrado questa sfrenata fantasia, o a causa di essa, scoprono una verità dopo l'altra, e conoscono le stesse arti degli agrimensori del Nilo. Il loro triangolo campione per tracciare l'angolo retto non è però quello coi lati nel rapporto 3: 4: 5, ma uno di lati 5, 12 e 13. Con questo "utensile" determinano la pianta degli altari, la cui forma talvolta assomiglia a quella di un'aquila composta di triangoli, rombi e quadrati.

Verso quest'epoca anche i diligenti cinesi fanno i loro conti servendosi di "abachi", composti di palline allineate su fili metallici. E lontano lontano ad Occidente l'impero americano dei civilissimi Maya, senza alcun contatto coi popoli finora visitati, possiede una amministrazione statale, un commercio e un calendario basati su sistemi numerali ottimamente concepiti.

Ma sulle rive del Mediterraneo sono in corso grandi eventi e sta per nascere qualche cosa di meraviglioso. Nelle isole di sogno che si specchiano nelle chiare acque azzurre e sulle cui pendici matura l'ardente frutto della vite, e sulla terraferma, nella città delle rose, Mileto, alcuni uomini sono presi da un irresistibile desiderio di vedere, di conoscere. Dinnanzi agli occhi stupiti dei contemporanei appaiono i sette saggi della Grecia, uno dei quali è Talete di Mileto. I suoi conterranei

lo considerano fin da giovinetto come un gran luminare dello spirito e della scienza, ma Talete ha avuto notizia di una sapienza piú profonda, piú antica ed illustre, e perciò s'imbarca su una nave e va in giro per il mondo là dove sa di trovare il premio migliore alle sue fatiche. Nel delta del Nilo vi sono numerose colonie greche, e truppe ausiliarie greche stanno al servizio dei Faraoni: non fa meraviglia che Talete vi si rechi. Viene accolto paternamente dai sacerdoti egiziani, che lo istruiscono e gli mostrano come si fa a misurare alcuni semplici oggetti; ma Talete è avido di conoscenza e il suo spirito comincia a smaniare. I sacerdoti si meravigliano non tanto delle scoperte di Talete quanto della singolare potenza di osservazione e di generalizzazione, a loro sconosciuta, con la quale il giovane elleno affronta i problemi.

Eccolo nel deserto, ai piedi delle grandi Piramidi. Un sacerdote egiziano gli domanda sorridendo quanto può essere alta la piramide del re Chufu (la piramide di Cheope). Talete riflette, poi risponde che non si contenta di valutarla ad occhio, ma la misurerà senza alcuno strumento, senza alcun aiuto. Si sdraia sulla sabbia e determina la lunghezza del suo proprio corpo. I sacerdoti gli domandano che cosa ha in mente, e Talete spiega: « Io mi metterò semplicemente a una estremità di questa linea che misura la lunghezza del mio corpo e aspetterò fino a quando la mia ombra sarà altrettanto lunga. Nello stesso istante anche l'ombra della piramide del vostro Chufu, o, come dicono gli elleni, Cheope, deve misurare tanti passi quanto è alta la piramide ». E poiché il sacerdote, disorientato dalla estrema semplicità della soluzione, riflette ancora se per caso non vi sia qualche errore, qualche sofisma, Talete aggiunge: « Se però volete che io vi misuri quest'altezza in qualsiasi ora, pianterò qui nella sabbia questo bastone da passeggio. Vedete, la sua ombra è ora circa la metà della lunghezza, per conseguenza in

questo momento anche l'ombra della Piramide è pres-s'a poco la metà dell'altezza. Siete ora abbastanza abili per misurarla con tutta precisione: non avete che da confrontare la lunghezza del bastone con quella della sua ombra per trovare mediante divisione o moltiplicazione dell'ombra della piramide l'altezza di questa ».

In questo semplice modo Talete fa stupire gli egizî; ma nella sua città natale riesce perfino a misurare la distanza delle navi in alto mare. Gli basta un angolo di mira e l'altezza sul livello del mare del punto dov'egli si trova. Lavora servendosi della similitudine dei triangoli e ha introdotto i piú semplici "rapporti" e le piú semplici "proporzioni" nella cerchia delle sue speculazioni. Ma non è tutto: ha scoperto qualche cosa di piú fondamentale, qualche cosa che è assai piú ricco di conseguenze. Sa già che l'angolo inscritto in un semicerchio, quell'angolo cioè i cui lati passano per gli estremi di un diametro e il cui vertice si trova sulla semicirconferenza, è sempre un angolo retto. Con questa scoperta ha spalancato una porta, attraverso la quale in futuro, un futuro molto prossimo, entreranno molte nuove cognizioni. Ma non vogliamo accontentarci di questo accenno: interrompiamo il nostro viaggio e spieghiamoci chiaramente. Fa meraviglia che un uomo del livello intellettuale di Talete, dopo aver riconosciuto una volta che sopra una e una sola ipotenusa si possono costruire nel semicerchio infiniti triangoli rettangoli, non si sia posto la domanda in quale rapporto stiano i cateti tra di loro e con l'ipotenusa comune, tanto piú che quasi certamente in Egitto avrà sentito parlare del triangolo che ha per lati 3, 4 e 5. Oppure non ha appreso nulla laggiú su questi triangoli? Non abbiamo notizie precise, ma si sa che Pitagora da Samo fu allievo di questo stesso Talete. Chiunque conosca i rudimenti della geometria vede chiaramente che cosa significa questo nome al punto in cui siamo arrivati. Ma di ciò parleremo esaurientemente piú tardi, per lo

meno dopo aver proseguito ancora un poco nel nostro viaggio per il mondo.

La vita di Pitagora da Samo si svolge in quel sesto secolo avanti Cristo da noi già piú volte citato, la cui essenziale importanza per la storia delle scienze verrà presto esaminata. In gioventú Pitagora viaggiò in lungo e in largo, e piú tardi su questi viaggi si ricamò molto. Di certo Pitagora dev'esser stato in Egitto. Si dice che, dopo peripezie d'ogni genere, sia stato assunto negli ordini sacerdotali egiziani e abbia seguito tutto il corso d'istruzione di quei sacerdoti. Si racconta dell'altro: nell'anno 525 a. C., quando Cambise conquistò l'Egitto, Pitagora, come sacerdote egiziano, sarebbe stato fatto prigioniero e inviato a Babilonia, e di là sarebbe andato a finire a Persepoli e in India. Liberato infine e ritornato a Samo, avrebbe lasciato subito un'altra volta la sua ingrata città natale.

Questi sono racconti di un'epoca piú tarda; tuttavia la sua dimora in Egitto è l'unica cosa accertata. In ogni modo Pitagora si recò negli anni della maturità nell'Italia meridionale, dove fiorivano in tutto il loro splendore le colonie greche, conosciute col nome di Magna Grecia, che costituivano a quel tempo il baricentro della civiltà ellenica. Nominiamone solo alcune: Sibari, Crotone, Metaponto. Pitagora sceglie come sua dimora la dorica Crotone, la città dai famosi atleti, e vi fonda la sua misteriosa scuola esoterica, il cui carattere religioso ricorda molto gli egiziani e i babilonesi. La scuola diventa in breve una specie di ordine segreto, una setta, e la sua influenza cresce rapidamente. Si dice che Sibari sia stata distrutta perché i sibariti avevano offeso Pitagora; ma anche intorno a tutti questi avvenimenti vi è molta leggenda e molto mistero. La scuola pitagorica venne infine distrutta, perché a causa della sua struttura aristocratica si fece innumerevoli nemici, e col suo carattere segreto dava appiglio a molti attacchi. Non sappiamo se ciò avvenne mentre

Pitagora era ancora in vita, il che è poco probabile, sebbene Pitagora abbia passato i suoi ultimi tempi non a Crotone ma a Metaponto.

Assolutamente sicuri sono i fatti seguenti, che per noi sono della massima importanza: la setta dei pitagorici considerava la matematica come il centro della sua attività, e questo è durato, in una forma o nell'altra, per quasi duecento anni. Il carattere originario di segretezza rende però quasi impossibile distinguere quali sono le scoperte di Pitagora e quali quelle dei suoi allievi; poiché d'altra parte noi ci occupiamo dei principî fondamentali, li attribuiremo, come fece la scuola, al grande maestro in persona, in considerazione anche del fatto che la sua enorme influenza sarebbe inesplicabile se non avesse prodotto egli stesso qualche cosa di veramente originale.

Ora siamo arrivati al punto di poter spiegare meglio il nostro accenno precedente all'importanza che ha proprio il sesto secolo avanti Cristo. Intorno a quest'epoca infatti si effettuò nel campo della matematica il "miracolo greco", il nascere dell'Occidente alla scienza e allo spirito scientifico. Quest'affermazione non è, come si potrebbe credere, il sogno di archeologi entusiasti di tutto ciò che è ellenico; si tratta proprio di un fatto dimostrabile, del quale anche gli antichi erano pienamente consapevoli, tanto da affermarlo e descriverlo laconicamente loro stessi.

Dobbiamo precorrere alquanto gli eventi. Quando infatti il grande patrimonio matematico dei piú gloriosi secoli ellenici esisteva già o si andava preparando, l'enciclopedico Aristotele suggerí di studiare lo sviluppo delle cognizioni matematiche dal punto di vista storico. Il suo discepolo Eudemo se ne assunse il compito, e un importante frammento delle sue fatiche ci è stato tramandato da Proclo Diadoco, un filosofo del quinto secolo dopo Cristo. Questo *Elenco dei matematici*, che ha retto finora a quasi tutte le indagini della critica

storica basata su altre fonti, dice a proposito di Pitagora queste parole significative: "Dopo costoro (*), Pitagora trasformò lo studio di tale disciplina (la matematica) in una vera scienza, considerando le fondamenta di essa da un punto di vista piú elevato e indagandone i teoremi sotto un aspetto piú astratto e intellettuale. A lui si deve anche la scoperta dell'irrazionale e la costruzione dei corpi cosmici".

Ritorneremo su ogni singola parola di questo passo importantissimo. Per ora ci colpisce l'affermazione che Pitagora per primo elevò la matematica al livello di "scienza" o, come dice con maggior precisione l'antico elenco dei matematici, la "trasformò" in scienza da un certo stato prescientifico in cui si trovava.

Che significa ciò? Che significa anzitutto questa affermazione in bocca a un autore che ha appena finito di parlare di Talete? Non sa nulla dell'Egitto, di Babilonia, dell'India? Non ha mai provato a fare, come noi, un volo con l'immaginazione per il mondo? Quest'Eudemo era solo pieno di vanità nazionale ellenica? Perché il neoplatonico Proclo, otto secoli piú tardi, trascrive questo passo senza alcuna postilla, in un'epoca in cui ogni viaggiatore poteva informarsi con poca spesa sulla matematica dell'antico Egitto?

Non stiamo troppo a sottilizzare. Rispondiamo semplicemente a queste domande che il "miracolo greco" è realmente esistito e che l'elenco di Eudemo non ha detto altro che la verità. Non è cosa semplice chiarire questa soluzione di continuità nella storia dello spirito umano; forse lo stesso Pitagora era ben lungi dal voler passare come rivoluzionario, e certo nella sua scuola non ha mai annunziato nessun programma di questo genere: "Voglio ora finalmente fare della matematica una scienza. Fino a oggi non è stata altro che un bran-

---

(*) Si riferisce a Talete di Mileto e a un certo Mamerco, del quale conosciamo soltanto il nome.

colamento senza scopo né programma, orientato secondo un punto di vista esclusivamente pratico". Cosí poteva esprimersi un Emanuele Kant a proposito della filosofia; e del resto solo dopo aver confrontato tra di loro la filosofia e la matematica fino ai suoi giorni. Ma Pitagora, tornato in Grecia dalle regioni dell'Oriente, non aveva di certo altra intenzione che quella di riferire quanto vi aveva appreso. Molto dovevano avergli taciuto, pensava, e a lui spettava cercare le basi di tutto quello che aveva udito e imparato. I discepoli, accesi dal sacro desiderio del sapere, l'interrogavano su questo e su quello, e all'improvviso – ecco la nascita dell'Occidente – tutte le conoscenze raggiunte fino allora dagli altri popoli cominciarono a riflettersi in uno spirito di tutt'altra natura, cominciarono a rifrangersi e a convergere attraverso la lente del genio ellenico. Lo spirito ordinatore ellenico cominciò a lavorare il materiale grezzo e ad analizzarlo "sotto un aspetto piú astratto e intellettuale". Che cos'è questa novità? Come fa un greco, un rampollo di questo popolo essenzialmente "visivo", ad abiurare la concezione puramente fisica dei freddi computisti d'Egitto e di Babilonia, portando alla ribalta l'Immateriale, il Metafisico e l'Intellettuale, cioè il puro dominio della mente? No, le cose non andarono cosí semplicemente come pensa l'aristotelico Eudemo. Non fu il puro intellettualismo a produrre il "miracolo greco", ma furono piuttosto le facoltà visive del mondo greco a renderlo possibile. Nei concetti e nelle ricerche dei greci appare in prima linea non un'analisi pedantesca, ma una visione sintetica che rapidamente giunge a perfezione. I greci, è vero, ci hanno regalato anche la logica come scienza, ma oltre a questo ci regalarono l'"idea" platonica, questo prototipo di ogni essenza, la loro plastica e la loro architettonica mai piú raggiunte. Tutte queste facoltà erano al lavoro anche quando nacque la "scienza della matematica". Indipendente da ogni scopo pratico, fon-

dandosi solo su se stesso, e inteso a realizzare un'armonia universale, sorse in Pitagora l'ideale di una matematica logicamente, otticamente ed esteticamente soddisfacente, la visione di un mondo di conoscenze, sul cui limitare veniva preso da un brivido di mistico sgomento.

Vedremo in seguito come questo ideale scientifico-estetico degli elleni (*) abbia reso possibile, arrestato e infine disperso tutto lo sviluppo della scienza greca. Queste affermazioni suonano contraddittorie, ma solo in apparenza, poiché ogni sistema ha in se stesso i propri limiti.

In che cosa dunque consisteva – per essere piú precisi – la novità rivoluzionaria della nuova "scienza"? E, anzitutto, che cosa vuol dire "scienza"? Secondo il significato letterale, scienza è un assieme di conoscenze raccolte e ordinate con una certa regola. Sta bene, ma una raccolta di conoscenze era anche il libro di aritmetica di Ahmes del terzo millennio avanti Cristo, anche le biblioteche di tavolette d'argilla della Mesopotamia. Perché non si può chiamare questa una vera scienza? A tal punto occorre dire, senza implicare alcun giudizio sul valore e sull'importanza relativa, che esiste una netta separazione fra tecnica e scienza. Il sapere applicato o destinato all'applicazione pratica, è tecnica: cioè una raccolta di consigli, ricette, procedimenti dati in mano ai pratici del mestiere senz'altra preparazione. Certamente anche prima di Pitagora vi è dietro la tecnica dei computi qualcosa che assomiglia alla scienza, ma tutta questa matematica pre-ellenica non aveva voluto affrontare i principî fondamentali, si accontentava di scoperte frammentarie e slegate che servivano bene per gli scopi pratici pur nella loro approssimazione, e mai aveva assunto come punto di partenza

(*) Come lo chiama Pierre Boutroux nella sua opera fondamentale *L'idéal scientifique des mathématiques*.

delle sue indagini la ricerca di leggi generali. Gli antichi egiziani si affaticavano a risolvere ogni singolo problema di divisione dei mucchi (che consisteva in una semplice equazione) e non pensavano affatto a fissare regole comuni per tutti i problemi simili o analoghi; tanto meno venne in mente ad alcuno di stabilire un metodo di scrittura uguale per problemi uguali. Solo molto piú tardi comprenderemo quante cose "non erano state fatte prima".

In ogni caso, l'*Elenco dei matematici* censura piú di una volta Talete di Mileto dal punto di vista strettamente scientifico, benché gli conceda "di aver trattato certe cose in modo piú accessibile ai sensi, altre in modo piú generale". Dobbiamo far rilevare qui, per non suscitare equivoci, che tanto l'Egitto come Babilonia non hanno certo evitato qualunque teoria; la loro teoria, però, per quanto possiamo vedere oggi, non era punto speculativa né deduttiva, ma probativa e induttiva. Ricavavano al massimo da parecchie soluzioni singole la soluzione generale di un problema, quando per avventura s'interessavano di cercarla; tuttavia non deducevano quasi mai il particolare dal generale. Ma è proprio la caratteristica fondamentale della matematica quella di seguire nelle sue indagini la seconda via, la deduttiva, per ottenere qualche cosa di veramente superiore e foggiare uno strumento idoneo anche agli scopi pratici.

Abbiamo usata la parola "strumento": dev'essere dunque la matematica semplicemente uno strumento? Certamente deve esserlo, in un certo stadio di sviluppo, poiché un inizio assolutamente privo di scopo non sarebbe altro che un giuoco dello spirito, uno "sport intellettuale", come oggi talvolta si sente dire. Per i greci, cultori dei giuochi olimpici, una tale ginnastica intellettuale non era troppo lontana dalla loro indole, e Pitagora non fu il solo a mettere in evidenza il lato puramente educativo dell'attività matematica. Ma an-

che il puro e semplice perfezionamento fisico per mezzo dell'atletica non è in ultima analisi fine a se stesso: non ci si può perfezionare di continuo solo per rallegrarsi infine della propria bravura. Dietro tutto ciò c'è, e c'è sempre stato, il pensiero della difesa, il concetto di ascesa di tutto un popolo, l'ideale di una perfetta preparazione. E con ciò si risolve assai facilmente e armonicamente l'apparente contrasto tra la "scienza come fine a se stessa" e "la scienza come strumento": una piccola schiera di precursori, animati da sacro entusiasmo, dimentica gli scopi pratici per i quali gli "strumenti" vengono creati, lo strumento viene portato alla massima perfezione e bellezza in sé e per sé, secondo principî che risiedono nel profondo della natura spirituale e intuitiva dei suoi creatori. L'adoperi ora chi vuole, e chi ne ha bisogno. In ogni caso l'arsenale di armi di quel popolo o di quella comunità ne viene arricchito.

Sembra che la segretezza della scuola pitagorica contraddica tale interpretazione; essa però non si applicava a tutto, ma principalmente a metodi e a deduzioni non ancora accertate. Le grandi scoperte vennero anche allora rese di pubblica ragione, a eccezione di taluni risultati che venivano ricercati a scopo di culto, oppure dei risultati che, a parere dei pitagorici, avrebbero condotto piuttosto al decadimento che al progresso della scienza. Sia come si vuole, non si può cancellare il fatto che una scienza, seppure tenuta parzialmente segreta, ha tutt'altro significato che semplici regole pratiche. Vediamo ora quale enorme passo innanzi si sia fatto nelle scoperte matematiche già per opera del loro primo trattatista di stirpe greca.

Se infatti un Talete di Mileto, che era stato da principio commerciante e solo in età avanzata si era dedicato alla matematica, aveva piú intuito che realizzato il grande trapasso dall'empirismo alla vera scienza, in Pitagora tutto ciò che era noto al suo maestro Talete

si fuse col materiale raccolto nei suoi viaggi di studio, per dare subito luogo a una serie di risultati decisivi. Di queste novità vogliamo trattare per prima la piú conosciuta, il cosiddetto teorema di Pitagora, senza il quale non è neppure concepibile una matematica in senso lato. Non vogliamo anticipare troppo, ma già qui dobbiamo accennare che senza questo teorema non si sarebbe potuto costruire quasi nessun ramo della geometria e delle matematiche superiori basate sulla geometria.

Ognuno conosce l'enunciato del famoso teorema, tutti sanno che in qualsiasi triangolo rettangolo il quadrato costruito sul lato opposto all'angolo retto (l'ipotenusa) è uguale alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati, i cosiddetti cateti. La domanda posta da Schopenhauer, perché esista questa relazione, come tutte le domande di questo genere, non ha risposta. Si può dimostrare in cento modi che è cosí: il perché rimane un mistero. Le proprietà di una figura geometrica risiedono nella sua natura, nel concetto della figura che noi stessi ci siamo formati. Tali domande sono prive di senso come quella se in realtà esistano angoli retti. Non vi sono, strettamente parlando, angoli di nessun genere in una realtà cosí concepita, poiché nel mondo materiale non possono manifestarsi linee infinitamente sottili e vertici privi di estensione. Tutte le costruzioni della geometria esistono solo nella nostra mente, costituiscono un regno dello spirito che porta in sé le proprie leggi, indipendentemente dall'esperienza esteriore, e che appunto come regno di pure forme, quando viene applicato a una qualsiasi "realtà", deve possedere e conservare il suo valore.

Le proprietà del triangolo sono valide al cento per cento per un triangolo di stelle come per un triangolo di legno, di metallo, di pietra o di qualsiasi altra materia; valgono anche per un triangolo di linee rappresentanti numeri, sia detto per incidenza.

Pitagora aveva dunque enunciato per primo la legge generale che fino allora era conosciuta in Egitto solo per i lati nel rapporto $3 : 4 : 5$ ($3^2 + 4^2 = 5^2$ ossia $9 + 16 = 25$) e in India per lati nel rapporto $5 : 12 : 13$ ($5^2 + 12^2 = 13^2$ ossia $25 + 144 = 169$), e oltre a ciò la legge reciproca, dalla quale in Egitto e in India si era effettivamente partiti. In questi due paesi si era detto, come sappiamo, che si forma un angolo retto (o che si ha un triangolo rettangolo) quando i lati stanno tra loro in quel certo rapporto. Pitagora dice viceversa: in ogni triangolo rettangolo, cioè in uno qualsiasi di tutti i possibili triangoli rettangoli, i lati si comportano nel modo indicato: c'è uguaglianza tra la somma dei quadrati dei cateti e il quadrato dell'ipotenusa. Adoperando come artificio costruttivo il teorema di Talete, si possono disegnare su una e una sola ipotenusa tutti gl'infiniti triangoli rettangoli i cui vertici devono trovarsi sulla circonferenza. Per quanto diversi appaiano questi triangoli, sempre il quadrato costruito sul diametro avrà la stessa superficie della somma dei quadrati costruiti sui due lati che congiungono un punto della semicirconferenza coi punti estremi del diametro suddetto. Crediamo che anche uno scettico vedrà ora chiaramente la differenza tra questa legge completamente generale e i casi singoli, di per sé utili ed esatti, della geometria egiziana ed indiana. Anzitutto il teorema di Pitagora, benché permetta una misura effettiva, è assolutamente indipendente da qualsiasi lunghezza concreta. È origine e punto di partenza, non conseguenza o risultato di una misurazione, ed ecco che lo "strumento" primitivo è diventato un meccanismo universalmente applicabile. Si può ora porre con tutta facilità la domanda, quanto per esempio debba essere lunga l'ipotenusa, se conosciamo entrambi i cateti $a = 5$ e $b = 7$. La somma $a^2 + b^2$ è, nel caso concreto, $5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$, perciò il quadrato dell'ipotenusa è uguale a 74. Questo numero però non

è il quadrato di nessun numero intero; non ha una "radice" intera, poiché $8^2=64$, e $9^2=81$. Questa è certamente una difficoltà molto seria, nella quale per il momento non vogliamo entrare. Pitagora cercò subito una via per ottenere terne di numeri tali che, data la condizione $a^2 + b^2 = c^2$ tutti e tre i numeri a, b, c fossero interi. Per i numeri dispari trovò lui stesso la formula, per i numeri pari la determinò alcuni secoli piú tardi il suo grande discepolo Platone. Nella soluzione data da Pitagora, in scrittura moderna, quando a è un numero dispari e viene rappresentato con $a = 2n + 1$, si ha $b = 2n^2 + 2n$ e l'ipotenusa $c = 2n^2 + 2n + 1$. Cosí, ad esempio, per $a = 9$, ossia $a = 2.4 + 1$, $b = 2.4^2 + 2.4 = 40$, e $c = 2.4^2 + 2.4 + 1 = 41$. Infatti $9^2 + 40^2 = 41^2$, ossia $81 + 1600 = 1681$ (*).

In base alla formula di Pitagora si ritrova facilmente, nel caso di $n = 1$, il triangolo egiziano, e nel caso di $n = 2$ il triangolo indiano. Molto probabilmente Pitagora sapeva anche di poter moltiplicare ognuna di queste terne di numeri per numeri interi a piacere, ottenendo sempre una soluzione intera; infatti il piú semplice disegno fa vedere che la sostanza della figura non varia raddoppiando, triplicando i lati, e cosí via. Cosí $(3.3)^2 + (3.4)^2 = (3.5)^2$ rappresenta di nuovo un triangolo rettangolo di numeri interi, come dimostra l'uguaglianza $81 + 144 = 225$.

Domandiamoci ora: come ha fatto Pitagora a trattare le equazioni indeterminate che gli procurarono le soluzioni anzidette? Era già in possesso di un calcolo letterale? Oppure ha preso a prestito la sua sapienza dalla cubatura dei mucchi praticata in Egitto? La seconda possibilità regge, la prima è senz'altro da scartare. Vi è anche una terza possibilità che dobbiamo

(*) Anticipiamo qui, per l'interesse dell'argomento, la formula di Platone per i numeri pari. Se $2n$ è un numero pari, i tre lati risultano $2n$, (n^2+1) e (n^2-1); cosí, per esempio, se $2n=8$ gli altri lati sono 17 e 15, e $8^2+15^2=17^2$ ossia $64+225=289$.

esaminare a fondo per importanti motivi. Ci viene infatti riferito che già Pitagora, e i pitagorici, praticavano l'artificio delle "applicazioni" geometriche, e che facevano uso corrente di tutti e tre i metodi di "applicazione": parabolica, ellittica e iperbolica. Si noti bene che qui non dobbiamo affatto pensare ai concetti di parabola, ellisse e iperbole a noi conosciuti. La concezione di queste curve si sviluppò molto piú tardi, con Apollonio da Perga, partendo da quello che stiamo ora discutendo; ma noi non siamo ancora arrivati a tal punto. L'artificio delle "applicazioni" è un'arte sviluppatasi propriamente su suolo greco e consiste nel trasformare le figure geometriche in altre di uguale superficie. I moderni studiosi della storia della matematica hanno giustamente designato questo artificio col nome di "algebra geometrica" (*). Questa particolare "algebra" permette effettivamente di risolvere, sotto forma travestita, equazioni fino al cosiddetto secondo grado o equazioni quadratiche miste.

Se volessimo indagare a fondo queste "applicazioni" usciremmo dal nostro programma, in quanto un cosiffatto metodo di risoluzione delle equazioni fu coltivato esclusivamente nella matematica ellenica (**). È però nostro compito quello di presentare almeno un esempio dei piú semplici, una "applicazione" parabolica di superficie. Che si possa concepire la moltiplicazione come rettangolo, è senz'altro chiaro: il prodotto di a e b è a volte b, e questo prodotto è uguale all'area di un rettangolo di lati a e b. Se ne deduce la proprietà commutativa della moltiplicazione, poiché l'area del rettangolo è pure evidentemente $b.a$, come si vede a colpo d'occhio e contando uno dopo l'altro i singoli

---

(*) Soprattutto Zeuthen, nella sua *Storia della matematica nell'antichità e nel medioevo*.

(**) Quando tornò in onore presso gli arabi o in Europa nel medioevo e all'inizio dell'età moderna, non fu altro che imitazione dai greci o reminiscenza dei loro metodi.

quadrati unitari. Si può cercare la soluzione di problemi piú complicati: se per esempio si suddividono i lati del rettangolo (o meglio si rappresentano con delle somme) si trova che $(a + b)\ (c + d)$ è uguale ad $ac + bc + ad + bd$. Basta tracciare per i punti di divisione delle rette parallele ai lati e rilevare l'area dei quattro nuovi rettangoli cosí determinati. In realtà nell'antica Grecia si diceva "rettangolo di a e b" (*) per designare

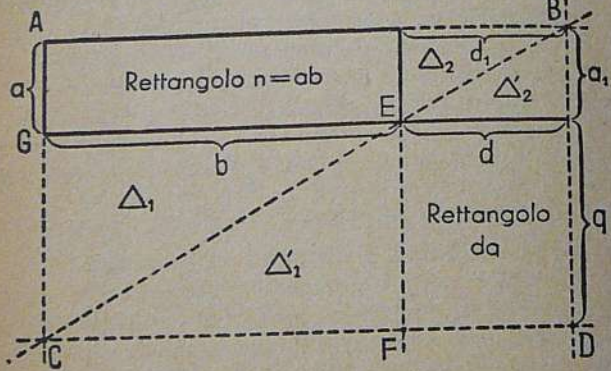


FIG. I

il prodotto $a.b$, cosí come ancor oggi noi indichiamo il prodotto $a.a$ con a^2, cioè "a al quadrato". Un prodotto però può essere sempre concepito come un nuovo numero. Vedremo piú tardi come Vieta e altri matematici moderni rimproverino ai greci di considerare i numeri una volta come linee e un'altra come superfici, ma ciò verrà discusso in seguito. Per i greci era un fatto accertato che un numero n, il quale fosse divisibile in qualche modo, poteva rappresentare un rettangolo di lati a e b, cioè $n = ab$. Questo rettangolo si può disegnare. Se ora si vuole dividere n per un certo

(*) Questa espressione si trova ancora in Descartes e occasionalmente anche piú tardi.

numero (= segmento) d, si prolunga b della lunghezza d e si "applica" su questo d un nuovo rettangolo, nel modo indicato nella figura.

Si traccia cioè anche il prolungamento d_1 fino al punto B, di qui attraverso E la diagonale fin dove taglia il prolungamento di a. Da questo vertice C viene tirata, parallelamente a b, una retta fino a D, punto d'intersezione del prolungamento di a_1 con questa parallela. Ora il grande rettangolo $ABCD$ così costruito viene diviso dalla diagonale in due triangoli uguali, ciascuno dei quali si compone di un rettangolo, che è ab per il primo e dq per il secondo, e di due triangoli, Δ_1 e Δ_2 per il primo e Δ'_1 e Δ'_2 per il secondo. Poiché Δ_1 e Δ_2 sono evidentemente uguali a Δ'_1 e Δ'_2, anche il rettangolo ab è uguale al nuovo rettangolo da noi "applicato" dq. Ma se $ab = dq$ sarà $\frac{ab}{d} = q$, cioè q è il quoziente tra il dividendo n e il divisore d.

Questa è soltanto una delle molte possibilità d'impiego dell'"applicazione" parabolica per la risoluzione dei problemi algebrici; nello stesso modo si potrebbe risolvere un'equazione lineare della forma $ab = cx$ oppure una delle sue trasformazioni, o anche il problema si potrebbe impostare nel senso di costruire, partendo dal rettangolo ab, un quadrato tale che $x^2 = ab$, di dove ricaviamo la soluzione positiva dell'equazione quadratica pura, e così via. In ogni caso i problemi trattati da Pitagora e dai suoi discepoli diretti erano già tutt'altro che elementari.

Questa impressione si rafforza sensibilmente in noi, se passiamo ad esaminare più da vicino la teoria pitagorica dei numeri, la sua aritmetica. Si sa che Pitagora considerava l'unità non come numero, ma come origine di tutti i numeri. Partendo dal principio che l'essenza delle cose fosse il numero, veniva coltivata una mistica dei numeri assai complessa e si scoprivano, studiando i numeri, ogni sorta di relazioni. Prima però

di precisare quest'argomento dobbiamo introdurre ancora un altro concetto, che avrà la sua parte nello studio dell'aritmetica pitagorica. La figura $A\ B\ D\ F\ E\ G$ (fig. 1), di somma importanza in tutte le costruzioni riguardanti le aree, veniva chiamata "gnomone", il che significa "conoscitore". I pitagorici cercarono subito di applicare ad un quadrato di lato 1 dei gnomoni con braccia ad angolo retto uguali e trovarono, come mostra la figura 2, il sorprendente risultato che

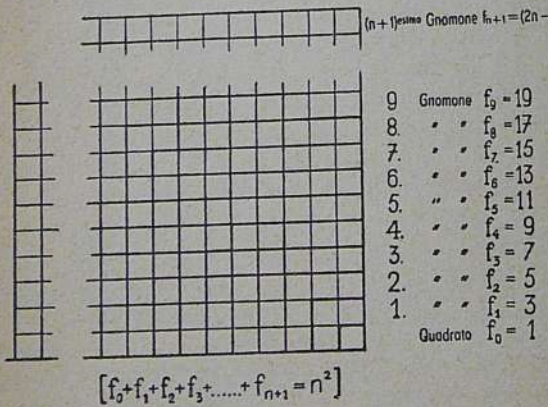


FIG. 2

la somma dei numeri dispari, estesa quanto si vuole, dà sempre dei numeri che sono quadrati di numeri interi. Per esempio: $1+3=4=2^2$, $1+3+5=9=3^2$, $1+3+5+7=16=4^2$, e così via fino a $1+3+5+7+(2n-1)=n^2$, dove n significa il numero d'ordine del gnomone applicato, aumentato di uno.

Viceversa dalla somma dei numeri naturali $1+2+3+4+\ldots$ si costruiva un triangolo col numero 1 al vertice e si chiamavano numeri "triangolari" tutti quei numeri i quali, come 28 o 55, risultavano dall'ad-

dizione della serie dei numeri naturali. Oltre a ciò, si chiamavano "numeri affini" (p. e. 220 e 284) quelli, ognuno dei quali è uguale alla somma dei divisori dell'altro. Infatti $220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$, e $284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$. "Numeri perfetti" erano quelli uguali alla somma dei loro divisori. Un numero perfetto per esempio è $6 = 1 + 2 + 3$, o $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$.

Tutto ciò valga come esempio delle indagini teoriche effettuate da Pitagora stesso e dai suoi allievi. Che cosa cercavano dunque con queste relazioni tra i numeri? Lo sappiamo bene: si voleva penetrare il segreto dell'armonia dei numeri e con esso quello dell'armonia dell'universo. A questa indagine si era anche spinti dai rapporti armonici della musica, come si rivelavano nelle singolari proporzioni tra le lunghezze della corda vibrante di un monocordo, in corrispondenza alle diverse note. Per farla breve, ci si beava nel pensiero di poter afferrare l'universo sotto forma di numeri interi, illudendosi di essere sulle tracce dell'ultimo mistero delle cose, e ciò nella maniera piú rispondente alla mentalità ellenica: sotto forma di una ininterrotta armonia, di tutta cristallina chiarezza.

A questo punto interviene d'improvviso a distruggere un cosí bel sogno una potenza infernale generata proprio dalle scoperte piú sensazionali; non si poteva infatti immaginare a quei tempi che proprio questa indesiderata scoperta, che sembrava l'opera di spiriti maligni, avrebbe piú tardi aperto la via a vertiginosi progressi matematici. Intendiamo parlare della scoperta dei numeri irrazionali.

Come questa scoperta fosse accolta dagli elleni possiamo vederlo attraverso un vecchio scolio al decimo libro degli *Elementi* di Euclide, attribuito modernamente al filosofo Proclo Diadoco già citato. Lo scolio dice: "È fama che colui il quale per primo rese di

pubblico dominio la teoria degli irrazionali sia perito in un naufragio, e ciò perché l'inesprimibile e l'inimmaginabile avrebbero dovuto rimanere sempre celati. Perciò il colpevole, che fortuitamente toccò e rivelò questo aspetto delle cose viventi, fu trasportato al suo luogo di origine e là viene in perpetuo flagellato dalle onde".

Chi legge questo passo senza sentirsi un brivido freddo nella schiena non ha il senso della mistica. Da queste parole spira una di quelle terribili maledizioni rituali che vengono pronunziate solo da chi vede minacciati l'ideale e il futuro di un popolo. Non c'è una parola di pietà per l'infelice, nessuna commozione per la sua sorte: ha peccato contro le cose piú sacre, si deve farlo tacere, annientarlo, trasportarlo simbolicamente nel luogo di "origine", cioè nel nulla da cui è venuto. Lo flagellino laggiú i flutti eterni, tenendolo in perpetuo prigioniero: ha toccato i piú profondi misteri della vita, sui quali a noi non è dato ripiegarci. Poiché è in avanti che si deve guardare, e il dono della vita ci è stato dato per salire dall'inesprimibile e dall'inimmaginabile, dalla profondità del Caos, al chiaro, all'armonico, al visibile, infine al Cosmo e all'armonia delle sfere.

È forse la piú ellenica delle leggende, questa della punizione divina del divulgatore di segreti. Ma il segreto era venuto in luce, relativamente presto, e la scienza doveva tenerne conto. Non lo fece però sotto forma di capitolazione, ma piuttosto sotto forma di un aspro contrattacco; anche oggi la lotta contro il numero irrazionale non è spenta, e perfino negli ultimi decenni si ebbero tentativi eroici per legarlo e dominarlo in qualche modo.

Per lo stesso Pitagora il numero irrazionale venne in luce la prima volta nel luogo piú inaspettato, proprio là dove si sarebbe dovuto prevedere la massima regolarità, e cioè nello studio del triangolo rettangolo

isoscele o, il che è lo stesso, analizzando la diagonale del quadrato. Se qui infatti i cateti sono entrambi uguali a 1, il quadrato dell'ipotenusa è pari a 2, essendo $1^2 + 1^2 = 2$, e l'ipotenusa stessa è la radice quadrata di due, in notazione moderna $\sqrt{2}$. Si può cercare quanto si vuole – e questo era noto anche a Pitagora – non si troverà mai un numero intero e neanche un numero frazionario che moltiplicato per se stesso dia esattamente 2. Oggi scriviamo $\sqrt{2} = 1{,}4142135624....$ e aggiungiamo dei puntini per significare che il numero dei decimali è infinito e che non vi è nessun sistema e nessuna periodicità semplice o mista che permetta di arrivare alla fine di questa operazione anche solo col pensiero. Il numero $\sqrt{2}$, cioè il risultato, è *alogos*, inesprimibile. Questo e altri numeri non raggruppabili secondo una regola sono, come dice lo scolio a Euclide, privi di rappresentazione; sono tutt'al piú un'immagine, anch'essa irrazionale, della vita, che schernisce qualsiasi raziocinio, qualsiasi facoltà analitica e ordinatrice. E, malgrado ciò, l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele, la diagonale del quadrato, è là, cosí diritta, cosí completa, cosí intelligibile, come se non si distinguesse in nulla da altri segmenti di retta. Non ha dunque una lunghezza reale, punti estremi reali? Alle estremità è forse sfilacciata o sfrangiata? No certo. Si trova subito qualcosa di piú, e qualche cosa di ancora piú misterioso: scegliendo come unità la diagonale del quadrato, essa dev'essere un segmento finito avente per lunghezza il numero intero 1. Come si presentano allora i lati del quadrato, cateti di un triangolo rettangolo isoscele? Certamente, in linguaggio moderno, $1^2 = x^2 + x^2$, cioè $1^2 = 2x^2$ e $x^2 = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$. La nostra x dev'essere dunque $\sqrt{\frac{1}{2}}$ da cui si ha $\frac{1}{\sqrt{2}}$, oppure, con

denominatore razionale $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Poiché $\sqrt{2}$ è irrazionale, anche la sua metà dev'essere irrazionale. Che è successo? I cateti, che prima erano razionali, son diventati tutt'a un tratto irrazionali? Si comprese subito anche allora che cosa significasse tutto ciò. Le due lunghezze, prese singolarmente, non sono affatto irrazionali, anzi non sono né razionali né irrazionali. Ma non sono confrontabili l'una con l'altra mediante numeri interi e neppure mediante numeri frazionari di qualsiasi genere; sono perciò irrazionali l'una rispetto all'altra, sono "incommensurabili". Ed ecco ancora un altro mistero: questa proprietà si riferiva evidentemente solo alla rappresentazione del numero come quadrato, poiché se si rappresentava per esempio il numero 32 come rettangolo dei lati 8 e 4, si poteva senz'altro far generare un'area di valore numerico 32 da due segmenti commensurabili, cioè 8 e 4. Si poteva, però, mediante transformazione di questo rettangolo in un quadrato equivalente, con l'aiuto dell'"applicazione" parabolica, rappresentare nel lato di questo quadrato la radice quadrata di 32. Questa radice era incommensurabile rispetto a 4 come a 8, era quello che oggi chiamiamo un numero irrazionale.

Ma gl'irrazionali spuntavano anche in numerosi altri campi degli studi geometrici, ora in pieno sviluppo, e – strano a dirsi – proprio dove si sarebbe dovuta trovare la massima regolarità. Cosí specialmente nel triangolo equilatero (rapporto fra lato e altezza), nell'esagono regolare, nel pentagono regolare, la cui prima rappresentazione e il primo studio appartengono sicuramente alla scuola pitagorica, se pure non a Pitagora in persona. È noto infatti che il pentagono a stella era nello stesso tempo emblema e segno di riconoscimento dei pitagorici.

Dalla scienza dei poligoni nacque, con un trapasso

altrettanto necessario quanto fecondo, la scienza dei solidi, la stereometria. Quel passo non ancora chiarito dell'*Elenco dei matematici*, dove è detto che Pitagora si occupò dei "corpi cosmici", non significa altro che la scoperta dei solidi o poliedri regolari. Il senso plastico degli antichi greci non incontrò in questo tutte le difficoltà che piú tardi furono poste innanzi dalla critica storica per dimostrare l'inverosimiglianza di tale scoperta in tempi cosí remoti. Nel frattempo si sono trovati in parecchi scavi "modelli" (come oggi si direbbe) di solidi poliedrici, di marmo o di bronzo; inoltre non si può negare che il cubo, il tetraedro e l'ottaedro fossero già conosciuti nell'antico Egitto. Rimaneva quindi da scoprire solo l'icosaedro, solido limitato da venti triangoli equilateri, e il dodecaedro, formato da dodici facce pentagonali. Proprio l'ultimo poliedro ora nominato era facilmente accessibile agli scopritori del pentagono regolare, e viene perfino riferito da Giamblico che un certo Ippaso della scuola pitagorica era riuscito per primo ad inscrivere il dodecaedro nella sfera; avendo poi rivelato questa scoperta, contro la regola dei pitagorici, era perito in mare come punizione per il suo sacrilegio. Un altro "giudizio di Dio" per "lesa geometria". Giamblico, il quale però scriveva dopo la nascita di Cristo, aggiunge che Ippaso con la sua divulgazione si era attribuita la gloria della scoperta del dodecaedro, mentre essa era effettivamente proprietà di colui, che nessuno osava chiamare per nome, cioè del grande Pitagora in persona. Da queste notizie possiamo dedurre che gli antichi attribuivano a Ippaso l'inscrizione nella sfera, ma allo stesso Pitagora la scoperta del dodecaedro regolare.

Ancora una parola circa la designazione dei poliedri col nome di "corpi cosmici". Questo nome è in rapporto con una concezione atomica, probabilmente postpitagorica, della costituzione del mondo. Secondo tale teoria gli elementi consisterebbero di particelle minu-

tissime, tetraedri per il fuoco, ottaedri per l'aria, icosaedri per l'acqua e infine cubi per l'"elemento" terra. Poiché in questa associazione dei poliedri regolari con gli elementi non vi era posto per il dodecaedro, si disse che questo serviva come schema e modello dell'universo.

Anche se quest'ultima ipotesi cosmologica ci si presenta piuttosto ingenua e artificiosa, non dobbiamo dimenticare che le nostre ultimissime vedute sulla costituzione della materia non sono poi enormemente diverse da quei primi timidi tentativi di spiegazione scientifica. Anche noi attribuiamo oggi la diversità dei nostri elementi alla diversità degli atomi. Anche noi utilizziamo nel "modello atomico" di Bohr, e piú ancora nelle teorie di Schrödinger e di Heisenberg una immagine geometrica della struttura degli atomi; solo che le nostre immagini non sono statiche e rigide come quelle degli antichi greci, bensí quantitative (numero di elettroni) e dinamiche (orbite degli elettroni).

Abbiamo cosí accennato a quanto di piú importante venne fatto da Pitagora e dai suoi discepoli, che è molto piú di quanto si possa notare con uno sguardo passeggero, e piú di quanto credettero i posteri, i quali sempre fanno grandi progressi, una volta preparato il terreno. Questo terreno solido noi lo contempliamo però non solo genericamente dal punto di vista dell'elevarsi della matematica a scienza deduttiva, operante cioè dal generale al particolare. È infatti indifferente se la scoperta di una legge generale sia avvenuta per via induttiva, poiché non si vieta ai matematici l'esperimento, bensí di fermarsi all'esperimento. Fu merito dei pitagorici non la sola generalizzazione in sé; essi posero le fondamenta imperiture di particolari cognizioni e dimostrarono con ciò che i loro metodi non erano un semplice programma, ma una vera e propria "arte inventiva", che di gradino in gradino li condusse sempre piú in alto. È certo che il teorema di Pitagora in

sé e per sé fu nei millenni seguenti un trampolino per ulteriori scoperte, diventò scherzosamente il *pons asinorum*, il ponte degli asini. Da questo teorema nacque però subito quel nuovo bizzarro tipo di numero, il numero irrazionale, e già il fatto che i pitagorici cominciarono a studiare la teoria dei numeri, anche se in principio solo con intenti mistici, fu un avvenimento decisivo per il progresso delle matematiche. Infatti fu questa attività che pose le fondamenta per lo studio delle successioni e delle serie di numeri; ed è una singolare coincidenza che proprio queste serie fossero destinate molto piú tardi a gettare il ponte tra la riva del razionale e quella non ancora espugnata, inesprimibile e inimmaginabile, dei numeri irrazionali.

II

EUCLIDE

Matematica e Filosofia

Vitruvio racconta, nella prefazione alla sua opera sull'architettura, il seguente aneddoto significativo: "*Aristippus philosophus socraticus, naufragio cum eiectus ad Rhodiensium litus animadvertisset geometrica schemata descripta, exclamavisse ad comites ita dicitur: Bene speremus, hominum enim vestigia video*". Tradurremo questo passo liberamente, per metterne bene in chiaro il contenuto simbolico, di enorme importanza per il nostro argomento. Dunque Aristippo, un seguace o allievo di Socrate, viene gettato da un naufragio sulla riva dell'isola di Rodi. Là osserva disegnate nella sabbia delle figure geometriche, e tosto, rivolto ai compagni, esclama allegramente: "Stiamo di buon animo, ché vedo impronte di uomini!".

Impronte di veri uomini, aggiungiamo noi. L'esclamazione di Aristippo ci fa quasi pensare al motto tedesco: "Dove si canta, là puoi fermarti tranquillamente; i malvagi non cantano". Per gli elleni la cosa era chiara: quella non poteva essere terra di barbari, poiché i barbari non conoscono le figure geometriche, "*schemata geometrica*". L'uomo civile ha il volto illuminato dalla conoscenza della geometria e la figura geometrica è la sua impronta.

Questo aneddoto deve risalire all'incirca all'epoca di Platone, cioè intorno al 400 avanti Cristo. Dobbiamo perciò questa volta viaggiare col nostro tappeto magico non attraverso lo spazio, ma attraverso il tempo, per riferire la sostanza di tutto quel movimento che con-

dusse con rapida, miracolosa ascesa, da Pitagora alle fulgide cime del pensiero greco. Noi distingueremo questo luminoso periodo intermedio di progresso come il periodo della compenetrazione della filosofia con la matematica, benché non vi manchino sviluppi e risultati prettamente matematici. La matematica infatti non sarebbe arrivata cosí in alto, se ad essa non si fosse associato un altro aspetto del genio ellenico, in parte fecondo, in parte dissolvitore.

Su questo stesso territorio della Magna Grecia, dove quel che rimaneva della scuola pitagorica proseguiva le sue profonde indagini circondate di mistero, si sviluppava anche una scuola filosofica, la scuola degli eleati, la quale, fondata dal grande filosofo Parmenide, ebbe infine in Zenone un rappresentante quasi caricaturale. Zenone non era un matematico, ma piuttosto, come dice Cantor, l'antitesi del matematico; tuttavia, col suo scetticismo non rifuggente da alcun paradosso, inaugurò una lotta che si è trascinata fino ai nostri giorni, senza arrivare a una conclusione definitiva. Egli toccò per primo con tutta chiarezza la grande contraddizione dello spirito umano, l'antinomia tra continuità e infinita divisibilità, tra quiete e moto. Ma prima di parlare di Zenone dobbiamo fare un passo indietro: si afferma infatti che già Anassimandro Milesio abbia introdotto nella scienza il concetto di infinito, e i pitagorici stessi, con le loro considerazioni sulle successioni di numeri e con la scoperta del numero irrazionale, gettarono profondi sguardi nel regno dell'infinito. L'*alogon*, l'inesprimibile, venne, è vero, ripudiato e respinto; si disse che a ogni numero corrispondeva bensí una grandezza e un segmento, ma non viceversa, cioè ad ogni grandezza o segmento un particolare numero. Ma a che serviva nascondere il problema fondamentale? Il numero irrazionale aveva ormai fatta la sua comparsa ed esisteva comunque, anche se non si voleva ricono-

scergli pieno diritto di cittadinanza tra le categorie del pensiero greco.

Frattanto era sorto, ancor prima di Zenone, un grande filosofo esperto di geometria, Anassagora, il quale aveva dato una acutissima definizione del principio di continuità: "Nel piccolo non vi è un estremamente piccolo, ma qualche cosa di sempre piú piccolo... cosí pure nel grande vi è qualche cosa di sempre piú grande". E circa vent'anni prima della nascita di Anassagora era nato un altro precursore, Democrito da Abdera, quell'antica diffamata città, sugli abitanti della quale correvano le storielle piú amene. L'"abderita" Democrito doveva però entrare nella storia dell'umanità come una stella di prima grandezza: infatti egli fu, per cosí dire, il primo inventore del materialismo e concretò per primo il concetto, che poi rimase, dell'atomo, dell'ultima particella indivisibile di materia. Democrito era anche un matematico di vaglia, aveva visitato l'Egitto, come già tanti altri, e proprio nel campo della matematica aveva fatto – singolare stranezza nello sviluppo della scienza – una scoperta fondamentale, che contraddiceva in pieno la sua filosofia atomistica. Determinò cioè per primo il volume della piramide e del cono, tagliando queste figure in sottilissime strisce, e trovò che l'una è uguale alla terza parte di un prisma, e l'altro di un cilindro, avente la stessa base e la stessa altezza. Questo risultato però, in sé rigorosamente esatto, non sarebbe stato possibile trovarlo tenendo per buona la teoria atomistica. Non bastano infatti strisce sottili, ma occorrono strisce infinitamente sottili, altrimenti si ottiene non una piramide liscia ma una piramide a gradini, e non un cono liscio ma un cono a gradini, che non hanno nulla a che vedere col prisma e col cilindro di superficie liscia. Comunque stiano le cose, con questa scoperta di Democrito o con quella di Anassagora – il quale, trovandosi in Atene come prigioniero politico, avrebbe

disegnata la prima quadratura del circolo – sta di fatto che tra i filosofi si era accesa una lotta su tutta la linea a proposito dei piú profondi problemi della matematica. E ora dobbiamo far intervenire l'"antitesi del matematico", lo scettico Zenone da Elea, per farci spiegare nella sua maniera pungente e amena la vanità di tutte le complesse elucubrazioni matematiche. Zenone era nemico dei pitagorici; non si sa perché, vogliamo però supporre che fosse non per motivi personali, ma per ragioni serie. Come avversario dei pitagorici, egli doveva anzitutto demolire l'oggetto piú sacro di questa scuola, il concetto di numero. E l'attaccò a fondo, negando in sostanza la possibilità di qualsiasi pluralità. Una pluralità, ragionava Zenone, doveva essere costituita da unità. Una unità, tale da meritare effettivamente questo nome, poteva esistere solo quando si trattasse di qualche cosa di indivisibile; ma una cosa indivisibile non poteva avere una grandezza, altrimenti sarebbe stata divisibile. Poiché dunque l'unità non aveva grandezza, era identica al nulla, e moltiplicando quante volte si vuole il nulla, non si ottiene altro che il nulla. Perciò non esisteva alcuna pluralità. Si poteva anche dimostrare nello stesso modo che le unità sono infinitamente grandi. Infatti se esiste la pluralità, le parti che la costituiscono devono essere separate l'una dall'altra. Allora si possono inserire in mezzo a queste parti altre parti, le quali a loro volta devono avere una grandezza, e cosí via all'infinito. Continuando questa operazione si arriva sempre a delle parti, a delle unità, che hanno una grandezza, e quindi si compongono di infinite altre parti, le quali a loro volta hanno una grandezza, e cosí via. Allora ogni unità deve essere infinitamente grande, poiché si compone di infinite parti dotate di estensione. Ma non basta il fatto che non vi sono né unità né pluralità, cioè né grandezze né numeri, oppure che tanto l'unità come la pluralità sono in sé infinitamente gran-

di: non esiste nemmeno il moto. Prima che una freccia scoccata dall'arco raggiunga la sua mèta, deve percorrere una metà del cammino, di questa metà ancora la metà, e cosí via. Dato che ciascuna di queste metà si compone di tratti realmente esistenti pari a 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 ecc. dell'intero percorso, essa è la somma di infiniti tratti, sia pure sempre piú piccoli, ma sempre reali. Allora la freccia impiega un tempo infinito a percorrere anche il tratto piú piccolo che l'occhio può percepire, rimane addirittura attaccata alla corda dell'arco! Ma supponiamo che i tratti parziali non siano ulteriormente divisibili, allora sono nulla del tutto; e da una somma quanto si vuole estesa di "nulla" non può risultare qualche cosa. Anche in questo caso la freccia non si muove dall'arco. Per motivi analoghi il piè-veloce Achille non può mai raggiungere la tartaruga, se questa ha una lunghezza di vantaggio su di lui, perché, mentre Achille percorre quella lunghezza, la tartaruga si avvantaggia di un altro tratto, e cosí via fino alla fine dei secoli, che né Achille né la tartaruga riusciranno a vedere.

Zenone era una mente troppo acuta per rispondere alle obiezioni che la freccia in realtà partiva, che la pluralità esisteva realmente e che Achille avrebbe in pochi istanti raggiunta la tartaruga, con le parole pronunziate migliaia d'anni piú tardi da un filosofo: "Tanto peggio per la realtà". Voleva piuttosto illuminare in modo quanto piú possibile suggestivo le "reali" difficoltà che si presentavano non appena si affermava l'esistenza di un principio, di un'ultima unità, di una parte di per sé indivisibile. E non cambiava nulla in questo il fatto che nel frattempo Teodoro di Cirene avesse dimostrato l'irrazionalità di tutte le infinite radici quadrate che non fossero radici di numeri elevati al quadrato.

Abbiamo già accennato a proposito di Anassagora che questo grande filosofo si era occupato della qua-

dratura del circolo. Si trattava di un problema singolo scelto a caso, oppure era una questione d'importanza fondamentale? Seguendo l'ordine cronologico dovremmo parlare qui dei tre grandi "problemi classici" del mondo ellenico, la quadratura del circolo, la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo; preghiamo però il lettore di consentirci il rinvio di questi argomenti al prossimo capitolo, dovendoci ora limitare ad altri problemi se vogliamo dare il giusto rilievo alla singolare figura di Euclide.

Osserviamo soltanto che anche in quest'epoca già molti studi venivano fatti, che erano una preparazione alle imprese di Archimede e di Apollonio da Perga. Per l'opera di Euclide era viceversa della massima importanza che si riconoscesse come lo spirito inventivo e la visione plastica non fossero sufficienti a portare la matematica alle altezze ideali intravvedute dalle menti piú illuminate. Per diventare una scienza nel vero senso della parola, la matematica doveva porsi provvisoriamente sotto la tutela della filosofia. Questo spostamento di posizioni era stato effettuato per primo da Zenone, con i suoi attacchi smodati, ma ben diretti, contro le fondamenta straordinariamente fragili e facilmente vulnerabili della matematica.

Prima di andare avanti, ancora una piccola parentesi assai utile: abbiamo già sentito che gli antichi greci, specialmente i pitagorici, chiamavano col nome di aritmetica la loro scienza dei numeri, termine che venne esteso anche a tutto ciò che allora aveva carattere algebrico. Un calcolo numerico concreto, come quello che aveva costituito l'occupazione matematica principale degli egizî, dei babilonesi e di tutti gli altri popoli non ellenici, sul suolo greco non era considerato scienza. Si chiamava "logistica", era l'arte apprezzata dei computisti (*logistici*), ma non era una scienza. Questa valutazione inferiore, di cui dobbiamo indagare le cause, esisteva nella matematica ellenica ancor piú come di-

visione assoluta tra la geometria pratica degli agrimensori, la cosiddetta geodesia, e la rigorosa geometria scientifica che era la sola a possedere un posto effettivo nel mondo intellettuale. La parola "geometria", cioè "misurazione della terra", è usata quindi in senso falso e anacronistico. Talete e i pitagorici dovevano adoperarla in relazione agli usi e ai metodi egiziani, senza pensare affatto alla matematica greca, la quale al massimo avrebbe potuto chiamarsi scienza delle figure, delle forme o delle proporzioni, se si voleva esprimere col nome quel che era e quel che non era.

Non vogliamo certo criticare i creatori di questa scienza per una questione di nomenclatura. Vi accenniamo soltanto per evitare possibili errori. A noi interessa molto di piú il fatto che la matematica greca nei suoi due rami principali, la scienza dei numeri e quella dei loro simboli (aritmetica e algebra) e la scienza delle grandezze e dei loro rapporti (geometria) evitò qualsiasi aspetto pratico; anzi, per dirla piú crudamente, non volle alcun contatto impuro con la pratica. La matematica doveva essere esercitata e mantenuta nell'ambito mentale, doveva essere bandita dal mondo dell'esperienza, per aspirare ad essere chiamata scienza. Con ciò (e questo serva a giustificare un puritanismo che sorprende in un popolo dedicato al culto della vita come era il popolo greco) venne assicurata la sua validità generale, la sua potenza di generalizzazione e la sua armoniosa unità estetica. In questo modo però essa passò senza accorgersene vicino a piú di un problema che solo l'esperienza avrebbe potuto formulare, e difettò, anche nel puro campo teorico, di una certa elasticità e larghezza di vedute. È il problema del mondo classico quello che appare qui, il problema della purezza formale in sé e per sé, il contrasto tra forma e contenuto, che alla fine del periodo preparatorio da noi or ora trattato venne sviluppato in tutta la sua ampiezza da Aristotele. E occorre aggiungere a questo

anche il profondo e misterioso problema della collaborazione tra i singoli fattori culturali. Mentre infatti in Egitto la matematica era una semplice tecnica ausiliaria di un complesso culturale certamente assai evoluto nel campo dell'architettura e dell'amministrazione, mentre tra i babilonesi e i loro precursori era una materia completamente per le necessità pratiche della vita e del culto, tra i greci costituí un mondo tutto suo. Sul suolo greco la matematica si rese indipendente e cominciò a dare la sua impronta al pensiero degli uomini eminenti, diventò una "superscienza", simile alla filosofia, la quale, per la natura dei problemi trattati, dovrà sempre essere una superscienza. E per conseguenza la matematica in questi secoli contrasta duramente con la filosofia sua rivale. A prezzo di tremende doglie spirituali nasce l'"uomo euclideo" (come lo chiama Spengler), il quale colloca la forma cosí in alto, da negare quasi alla scienza di maggiore utilità pratica ogni applicazione alla realtà, per portarla in pochi secoli a una perfezione che invero essa ha nuovamente raggiunta solo alla fine del diciannovesimo secolo. Su questa strada si procede senza errare, nulla è troppo piccolo, nulla troppo difficile, pur di raggiungere lo scopo. In questi secoli cosí tempestosi e movimentati della storia greca, nei quali l'invasione dei persiani s'infrange contro le corazze e le spade di artisti, filosofi e matematici; nei quali purtroppo la rivalità fraterna celebra le sue orgie piú sanguinose nella guerra peloponnesiaca; nei quali infine il ribelle discepolo di Platone, quel grande intelletto enciclopedico che fu Aristotele, istruisce un giovane re semiselvaggio delle montagne macedoni, che poi come Alessandro Magno manda in frantumi i decadenti stati orientali e meridionali fino all'India e ai confini dell'Etiopia – in quest'epoca cosí tormentata e veramente grande, la filosofia completò il lavoro di chiarificazione della matematica ad essa affidato, lavoro contemporaneo alle meravigliose forme

create da Fidia e da Prassitele, e alla grande arte drammatica di Eschilo, di Sofocle e di Euripide.

È fama che nell'Accademia di Platone non potesse entrare chi era ignorante di geometria, e nel Liceo di Aristotele la matematica elementare veniva considerata come un'ovvia premessa. Di piú: lo stesso Platone pose la condizione, valida ancor oggi, secondo la quale le costruzioni geometriche sono canoniche solo quando si possono eseguire senz'altro aiuto all'infuori della riga e del compasso. Ciò significa, come oggi si sa, che in questo modo si possono risolvere solo problemi ai quali, aritmeticamente parlando, corrispondono equazioni di grado non superiore al secondo, cioè al massimo equazioni quadratiche miste. Ma Platone non si fermò a questo: si fece istruire dai pitagorici, apprese alcune nozioni da condiscepoli come Teeteto o da contemporanei come Eudosso, il primo dei quali costruí la teoria dei numeri irrazionali in tutta la sua generalità (*). La condizione posta da Platone a chi volesse varcare la soglia dell'Accademia, non era affatto intesa come una frase, oppure come una conoscenza superficiale. Egli stesso per primo nella storia della matematica dette grande importanza al cosiddetto "metodo analitico", il quale consiste nel considerare il problema geometrico come risolto e nel ricavare, procedendo a ritroso, le proprietà delle figure nella loro massima generalità. D'altra parte se i corpi cosmici o i poliedri regolari si chiamano anche corpi platonici, ciò dipende piú da considerazioni di filosofia naturale e dallo studio approfondito fattone da Platone, che dalla loro scoperta.

Dopo Platone, il cui ammonimento ai discepoli di dedicarsi alla matematica da un punto di vista filosofico e critico era caduto su un terreno assai fertile, entrò in scena, come già accennammo, il grande stagirita Aristotele. Questi creò un capolavoro del pen-

(*) Di Eudosso parleremo esaurientemente nel prossimo capitolo.

siero umano, la cui forma venne sí presa in prestito alla matematica, ma fu poi restituita alla matematica stessa come linea direttiva e mezzo d'indagine: intendiamo la fondazione della logica come scienza; la logica, della cui nascita ci sembra di sentire ancor oggi l'annuncio attraverso i dialoghi di Platone, cosí palpitanti di vita, cosí inebrianti nel loro divenire. La mente di Aristotele, a differenza di quella di Platone, era incline non tanto al sintetico e al deduttivo quanto all'induttivo; egli era studioso e collezionista nello stesso tempo, e consigliava di compilare cataloghi in ogni ramo dello scibile, anche nel campo della matematica. Cosí avvenne che il suo discepolo Eudemo compilò quella pregevole storia della matematica, i cui frammenti, conservati attraverso Proclo sotto il nome di *Elenco dei matematici*, hanno ancor oggi per noi un valore inestimabile.

La tempesta suscitata da Alessandro Magno con le sue conquiste si è quietata. Alessandro ha compiuto la sua parabola: l'Oriente da lui abbattuto l'ha svuotato, sfibrato e condotto a una fine immatura. I Diadochi si son divisi tra loro l'eredità, e ad Alessandria, proprio nel centro di questo mondo oramai pacificato e in via di trasformazione, risiede Tolomeo Sotero, il primo re greco d'Egitto. Atene rimane ancora la massima sede di ogni cultura; ancora fioriscono in nobile gara l'Accademia di Platone e la scuola peripatetica di Aristotele. Anche la Magna Grecia per il momento è solo minacciata, ma non ancora oppressa. Tuttavia il centro di gravità del mondo spirituale comincia a spostarsi verso Alessandria: laggiú, sotto il regno di Tolomeo II Filadelfo, sorgono vaste dimore per lo spirito, sorge il Museion, luogo di studio, biblioteca e opera pia nello stesso tempo. Agli studiosi del Museion è risparmiata qualsiasi preoccupazione materiale; ogni scienza, anche quella orientale ed egiziana, affluisce a loro compiacentemente e senza misteri, e nelle aule

riposano migliaia e migliaia di rotoli di papiro, sui quali abili amanuensi hanno trascritto tutta la sapienza fino allora raggiunta in ogni regione della terra.

Per queste aule, intorno al 300 avanti Cristo, un uomo si aggira taciturno. Non sappiamo da dove è venuto, non sappiamo neanche quando è nato e quando è morto. Per quanto riguarda la sua persona si sa appena che una sola volta in vita sua ha detto qualche cosa, una frase da far rizzare i capelli in testa a tutti i cortigiani. Quando infatti il suo re Tolomeo Filadelfo gli chiese se per l'insegnamento e lo studio della matematica vi fosse una via piú comoda di quella dei suoi *Elementi*, rispose orgogliosamente: « Nella matematica non esiste una strada regale ». Tolomeo Filadelfo non dovette prendersela a male; probabilmente ne rise, ma non troppo bonariamente, poiché i primi Tolomei si distinsero tanto per la sensualità senza scrupoli (la soppressione dei loro familiari e altre simili bazzecole), quanto per il loro grande mecenatismo. Cercavano di consolidare la loro potenza sia nel presente che rispetto all'eternità, e sul suolo d'Egitto, avvezzo alle cose eterne, adoperavano per quest'ultimo scopo, al posto delle piramidi usate in antico, gli artisti, i filosofi e i matematici. Con Euclide il loro piano riuscí a perfezione: gli *Elementi* ai quali abbiamo già accennato sono, dopo la Bibbia, il libro piú riprodotto che esista nel patrimonio della cultura occidentale e, secondo una stima prudenziale, ebbero solo per le stampe piú di 1500 edizioni diverse, alcune delle quali raggiunsero un numero vertiginoso di esemplari.

A proposito di libri, bisogna dire che anche sotto questo aspetto è intervenuto un grande cambiamento dagli inizî della matematica greca. Mentre un Talete o un Pitagora non hanno lasciato dietro di sé alcuno scritto, adesso, pochi secoli piú tardi, abbondano i documenti del genere. Dev'esservi stata già tutta una serie di "elementi" di geometria prima ancora di Eu-

clide, ma noi non possediamo nessuna raccolta di questo genere. Si tratta di un puro caso? Euclide fu forse uno tra tanti cui un destino favorevole consentì di usurpare l'immortalità, mediante la conservazione dei suoi scritti, ingiustificata dal punto di vista del valore intrinseco e dell'argomento? No, non fu così. Come nel caso di Pitagora, anche qui è uscita fuori dal capo di Zeus una Pallade Atena armata di tutto punto. Gli *Elementi* erano una cosa talmente nuova, talmente vasta, definitiva e inattaccabile, da suscitare anche allora, subito dopo la loro comparsa, quello che oggi si direbbe una grandissima sensazione. Perciò furono riprodotti in maniera sproporzionata rispetto ad altre opere del genere, e divennero base di studio e possesso comune di tutte le persone colte, tanto da non più lasciare il mondo dell'intelletto anche quando la terra tremò e nuovi popoli ereditarono il patrimonio dell'antichità classica. Gli *Elementi* di Euclide furono per l'appunto una delle voci più importanti di questa eredità.

Finora però abbiamo parlato di cose che toccano il nostro argomento solo dall'esterno: una biografia di Euclide, che consiste in un unico aneddoto e in una data piuttosto vaga, e il successo di un libro, successo di cui abbiamo affermato la fondatezza, ma che non dev'essere ritenuto giustificato semplicemente sulla parola. È perciò tempo di entrare nel vivo della questione.

Non è senza uno scopo che abbiamo insistito nel mettere in evidenza le contese dei filosofi greci. All'inizio dell'epoca alessandrina l'atmosfera culturale del mondo greco, chiarita, purificata e nuovamente intorbidata da tutte queste lotte accanite, richiedeva alla "più sicura delle scienze" qualche cosa di diverso dagli occasionali quesiti imbarazzanti e dalle soluzioni a indovinello che lasciavano altrettanto perplessi. Richiedeva inoltre la fine dello "scandalo della matematica", dal momento che la matematica, in seguito ad attacchi

del genere dei paradossi di Zenone, non aveva guadagnato gran che nella stima delle masse, eccitate al riso dallo scherno dei commediografi. E questo era tanto piú necessario, in quanto la matematica veniva considerata come una specie di sacra proprietà nazionale, come una dimostrazione di umanità, una manifestazione di cultura e di civiltà superiori. In che modo si poteva affrontare questo compito gigantesco? C'era soltanto la via tracciata dalla logica di Aristotele, la costruzione di una vera scienza mediante una rigida sistematica, e non già mediante le fatiche artistiche di compilatori e di eruditi in vena di originalità, i quali trattassero la matematica come una raccolta di rarità ripartita in un modo qualsiasi. Al contrario, tutto doveva elevarsi passo passo, partendo dalle ime radici, dalle pietre basilari, dinnanzi all'appassionato ricercatore della sapienza, e una verità doveva necessariamente derivare dall'altra. Per l'analisi nel senso di Platone ci sarebbe stato tempo piú tardi; bisognava prima creare per via puramente deduttiva la sintesi, il graduale e ordinato sovrapporsi delle conoscenze matematiche.

Euclide eseguí questo lavoro gigantesco, che appariva disperato a tutti i predecessori, in modo tale che il suo edificio ha sostenuto per millennî qualunque critica, a meno che non fosse provocata da semplice cattivo umore come nel caso degli appunti di Schopenhauer, e anche allora dipendente, come in tutti i rimproveri analoghi, da una profonda incomprensione di quelli che sono i veri scopi della matematica. Euclide ha dunque assolto il suo compito cosí bene che solo lo sviluppo intellettuale degli ultimi decenni del secolo decimonono ha potuto raggiungerlo e generalizzare la sua opera, confermandola piú che attaccandola attraverso questa generalizzazione. In breve, si potrebbe scrivere come motto sugli *Elementi* di Euclide il titolo dato al proprio libro (però in altro senso)

dal padre Saccheri, precursore delle geometrie non euclidee: "*Euclides ab omni naevo vindicatus*", Euclide purificato da ogni macchia.

Accenneremo solo incidentalmente che Euclide fu il fondatore e il primo direttore della grande scuola di matematica di Alessandria, che compilò altre importanti opere, tra cui un libro sulle sezioni coniche, e che gli compete incontestabilmente il posto di grande matematico anche a motivo delle sue scoperte personali. Non deve cioè apparire come un semplice compilatore e ordinatore, anche se questa sua attività lo rende da sola immortale, perché riguarda la concezione unitaria di tutta la matematica.

Sfogliamo ora gli *Elementi*, per averne una visione piú immediata. Il titolo greco era *Stoicheia*, e sono divisi in tredici libri. All'inizio sta il famoso sistema di assiomi, la raccolta delle spiegazioni, delle premesse e delle proposizioni fondamentali. Questi singoli gruppi di enunciati sono stati chiamati anche definizioni, postulati e assiomi, e si è discusso molto in che cosa si distinguano tra di loro. Certamente gli assiomi o proposizioni fondamentali non sono altro che cognizioni generali o generalmente valide, patrimonio comune di tutti gli uomini, che non richiedono dimostrazione e che non potrebbero d'altra parte essere dimostrate. Ogni dimostrazione, anche la piú complicata, deve approdare infine a questi assiomi, sui quali è fondata. Che il tutto sia maggiore della parte (assioma 9°) oppure che due rette non possano mai racchiudere un'area (assioma 12°), deve trovarsi alla base di qualsiasi ragionamento matematico, come anche, per esempio, il postulato 2°, che si può sempre prolungare rettilineamente una retta di lunghezza limitata, oppure il postulato 3°, che è sempre possibile costruire un cerchio di raggio qualsiasi partendo da un punto qualunque assunto come centro. Inoltre la geometria premette, come semplici definizioni, che un punto non ha parti (defini-

zione 1ª), che una linea possiede solo lunghezza e non ha larghezza (definizione 2ª) e che un angolo simmetricamente uguale al suo angolo adiacente è un angolo retto (definizione 10ª).

Su questo numero limitato di 35 definizioni, 3 postulati e 12 assiomi (*), Euclide eleva, come si è già detto, tutto l'edificio della sua matematica, benché nel corso della trattazione aggiunga ancora un gran numero di definizioni, però nessun altro assioma o postulato.

Il primo libro tratta dei triangoli, delle parallele e dei parallelogrammi e si chiude con la classica dimostrazione euclidea del teorema di Pitagora. Osserviamo che la forma di dimostrazione ancor oggi usata, consistente nell'affermazione, nella dimostrazione e nella formula finale "come dovevasi dimostrare" (per le costruzioni, "come dovevasi costruire") appare per la prima volta in Euclide nella sua logica sequenza. Il secondo libro applica il "Magister Matheseos" (come venne chiamato piú tardi il teorema di Pitagora) nel modo piú esteso e contiene coi suoi esercizi di trasformazione una vera e propria "algebra geometrica", del tipo che abbiamo già imparato a conoscere parlando dei pitagorici. I due libri successivi di geometria piana trattano del cerchio, dei poligoni inscritti e circoscritti, e chiudono, col quinto libro sulle proporzioni e col sesto libro sulla similitudine delle figure, la prima parte dell'opera. È da mettere in evidenza l'enorme generalizzazione apportata da Euclide a tutti i teoremi fino allora noti. Senza perderci in particolari, accenniamo tuttavia alla 31ª proposizione del sesto libro, la quale afferma che la somma di figure simili costruite sui cateti è sempre uguale a una figura simile alle prime due costruita sull'ipotenusa. Questo teorema, dimostrato da Euclide in due modi, è una conseguenza molto generale del teorema

(*) Secondo l'ultima interpretazione vi sarebbero 23 definizioni, 5 postulati, e 8 assiomi, senza che questa diversità di suddivisione alteri la sostanza della cosa.

di Pitagora, e con esso rimane anche dimostrato che la somma di due "lunule" formate da cerchi, costruite sui cateti, è uguale alla lunula costruita sull'ipotenusa.

Se questa estensione delle conoscenze nel campo della geometria piana è già sorprendente, i libri seguenti, dal settimo al decimo, ci fanno meravigliare anche di piú. Vediamo sorgere dinnanzi a noi niente meno che una teoria generale dei numeri, a cominciare dalla differenza tra numeri primi e numeri composti, passando al concetto di misura comune e multiplo comune e alla dimostrazione della quantità infinita dei numeri primi, fino a una perfetta teoria dei numeri irrazionali e incommensurabili. Uno studioso moderno, il Nesselmann, spiega che per ben milleottocento anni non si è potuto venire a capo dei risultati raggiunti negli *Elementi* sull'argomento degli irrazionali, il che è una cosa comprensibile, se si pensi che Euclide, senza una vera e propria scrittura algebrica, quindi per via prevalentemente geometrica, doveva eseguire trasformazioni di ogni genere su espressioni del tipo $\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{a \pm b}}$ $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$. Questa testimonianza di Nesselmann serva a contraddire efficacemente l'errata opinione comune che gli uomini eminenti dell'antichità fossero piuttosto semplici di mente, solo perché vissero alcune migliaia d'anni prima di noi o perché aspiravano a cose diverse da quelle che interessano noi.

Dopo aver esaurito la teoria dei numeri, Euclide si dedica, nei libri dall'undecimo al tredicesimo, alla geometria solida, e costruisce anche questa per via sintetica, senza tuttavia trattarla in modo cosí esauriente come la geometria piana, inconveniente che si ripercuote ancor oggi sull'insegnamento. I risultati ottenuti nel campo della stereometria sono però anch'essi molto importanti; per esempio, nel caso di figure a superficie curva, come la sfera, egli adopera già me-

todi di calcolo con gli infinitesimi (matematica infinitesimale), sotto la forma della cosiddetta dimostrazione per "esaustione". Ma di ciò parleremo nel prossimo capitolo. Si può ora accennare come, secondo il parere di alcuni trattatisti dell'antichità, lo scopo finale e il coronamento dell'opera di Euclide fosse lo studio dei corpi cosmici, cioè dei poliedri regolari. Di fatto già in Euclide si ha una dimostrazione rigorosa che possono esservi solo cinque solidi regolari (come osservazione al 18° teorema del tredicesimo libro), il che viene anche dimostrato assai elegantemente. Lo stesso Proclo, a noi ben conosciuto, il quale dalla pretesa appartenenza di Euclide alla filosofia platonica dedusse che il suo intento fosse lo studio degli "elementi" (i solidi platonici), in un altro passo dice in modo piú plausibile che si potrebbero chiamare "elementi" tutte quelle cose "la cui teoria aiuta a penetrare nella comprensione delle altre cose, e a partire dalle quali ci riesce facilitata la risoluzione delle difficoltà insite in queste altre cose". In breve, mediante gli elementi saremmo in grado di impadronirci di tutte le altre cose che appartengono alla matematica. Gli elementi non sono con ciò una "strada regale", ma l'unica grande strada maestra che conduce per monti e per valli al possesso della matematica. E risale ad Euclide la divisione della matematica in tre gradi, cioè matematica assiomatica, matematica elementare e matematica generale, il cui campo non può manifestamente essere limitato né ristretto. In questo modo sarebbero state poste in eterno, per opera di Euclide, le fondamenta della matematica, e di conseguenza noi potremmo solo ingrandire la sua opera, ma non costruirla su altre basi. Ciò pensava ancora Kant nella sua famosa prefazione alla *Critica della ragion pura* dell'anno 1787. L'impero del mondo "euclideo", della matematica "euclidea", rimase incontestato fino all'inizio del secolo decimonono, benché su uno degli assiomi (che è, secondo le

interpretazioni, l'assioma 11° o il postulato 5°) si siano rotti il capo anche gli antichi greci. Qualche matematico moderno, di quelli che sanno immedesimarsi in Euclide, arriva ad affermare che lo stesso Euclide deve aver scritto questo assioma con grave rimorso di coscienza. Esso dice: "Quando una retta incontra altre due rette e forma con esse dalla stessa parte angoli interni la cui somma è inferiore a due angoli retti, quelle due rette, prolungate all'infinito, devono incontrarsi dal lato dove si trovano gli angoli la cui somma è inferiore a due retti".

Sappiamo dalla scuola che la maggior parte della nostra geometria si regge o cade con questo assioma, poiché per esempio il fatto che gli angoli di un triangolo abbiano come somma 180°, o due retti, è malamente dimostrabile senza l'assioma delle parallele. E già gli antichi greci, assai abili nell'uso dei triangoli sferici, avrebbero potuto osservare che effettivamente nella sfera, sulla quale si hanno solo "rette" (i meridiani) intersecantisi, la somma degli angoli è sempre diversa da 180° e costantemente li supera (*).

Ma torniamo al mondo euclideo. Dal nostro punto di vista nello spazio e nel tempo – la città di Alessandria nel quarto e terzo secolo avanti Cristo – la matematica, per opera di Euclide, si è assicurata perfettamente contro ogni pericolo di demolizione filosofica. La nostra scienza, appena nata, se ne sta in tutta la sua purezza davanti agli occhi stupiti del mondo. Ecco spianata la via per un'ascesa illimitata, ecco resa possibile la costruzione di torri che raggiungano il cielo: le fondamenta sono profondamente radicate nelle leggi inesorabili della logica, e insieme nelle leggi della pura intuizione, nello spazio tridimensionale "euclideo".

(*) Sulla sfera s'intende col nome di "retta" la linea più breve che unisce due punti, cioè il circolo massimo, se non si abbandona la superficie della sfera. I greci però non arrivarono a una tale generalizzazione.

III

ARCHIMEDE

Matematica e realtà

Entra ora in scena una nuova potenza in pieno sviluppo, non appena l'ellenismo, dopo le spedizioni di Alessandro, ha terminato di sognare l'ultimo grande sogno di un imperialismo mondiale. Nell'anno 216, presso Canne, 50.000 valorosi legionari romani vengono fatti a pezzi da Annibale: è il punto critico della storia romana, una di quelle date in cui non piú la capacità fisica, ma esclusivamente le doti morali di una nazione decidono della sua vittoria o della sua sconfitta. Tutto sembra perduto per Roma: malgrado ciò, essa raccoglie gli ultimi uomini adatti alle armi, li equipaggia con vecchi cimeli di guerra presi nei templi, e, appena due anni dopo, ecco il console Marco Claudio Marcello davanti a Siracusa, con gli avanzi dell'esercito già quasi annientato a Canne, per punire l'alleata di Cartagine. Anche qui però la sfortuna perseguita i romani con segni sfavorevoli. Quando Marcello attacca Siracusa dal mare, dalle mura piombano mani e rostri di ferro, che si aggrappano alle navi e le sollevano in alto per lasciarle poi ricadere. E sulle tavole fracassate alle quali si attaccano i naufraghi fischia una terribile grandinata di pietre gigantesche, mai prima d'ora sollevate dalla forza dell'uomo. I veterani piú induriti impallidiscono, e appena sulle mura di Siracusa spunta un canapo o un pezzetto di legno, i legionari fuggono presi da un terrore irrefrenabile. Sta bene combattere contro gli uomini o, se occorre, contro gli elefanti di Annibale, ma non si può andare contro di-

vinità avverse e giganti dalle cento braccia. Tuttavia il loro capo, il console Marcello, presto spiega quei miracoli terrificanti. Apprendono così che un sol uomo combatte contro tutti loro, un solitario vecchio di settantadue anni. Si chiama Archimede, ed è il più grande matematico greco, uno di quegli uomini bizzarri, schivi del mondo, la cui natura è altrettanto incomprensibile alla mentalità indurita e realistica dei romani quanto il suo affaccendarsi con lettere e linee misteriose. Che stregoneria è questa? Si è avuto torto a schernire e a deridere questi originali? Adesso che la cosa è diventata seria, ben ci sta: ecco i ferrei artigli che si allungano sopra le mura e le pietre che grandinano, come se il Vesuvio e l'Etna insieme vomitassero le viscere stesse della terra.

E dev'essere causa di tutto proprio questo Archimede, il più lepido geometra che i greci abbiano prodotto. Si sa tutto dai prigionieri siracusani, i quali cercano di migliorare con le chiacchiere la loro condizione. Si sa che Archimede è imparentato con la casa reale, che appartiene a una famiglia un tempo ricca, ma che ha sperperato ogni cosa con la sua svagatezza. È da meravigliarsi se è andato in rovina un uomo che i familiari dovevano spingere al bagno, perché si dimenticava di questo come dei pasti? E quando infine si decideva a bagnarsi, nel fare la sabbiatura disegnava di continuo sulla rena e mormorava parole incomprensibili. Già, una volta si era messo perfino a correre completamente nudo per le vie di Siracusa, gridando: "Eureka, Eureka!". Che cosa dunque aveva "trovato"? Che l'orefice ingannava il re e che la corona d'oro non era fatta d'oro puro? Apparentemente Archimede era arrivato ad accorgersene, osservando che l'acqua del bagno traboccava al suo entrare nella vasca. Per gli Dei, non era una gran scoperta. In ogni caso, questo Archimede doveva essere un pazzo o un dèmone o tutt'e due.

I legionari romani, in massima parte semplici con-

tadini, non sono per nulla rassicurati da questi racconti dei siracusani. Al contrario, ora cominciano a credere davvero all'incantesimo e alla magia piú nera. E quando alfine, dopo due anni di terrore, Siracusa cade nelle loro mani con l'astuzia e la corruzione, si precipitano uccidendo e saccheggiando per le vie della città conquistata e sono piú inferociti che mai, perché ad ogni angolo di strada temono che spunti qualche nuovo fantasma creato da Archimede.

Un legionario entra in una casa apparentemente disabitata e trova nel giardino un vecchio che disegna figure nella sabbia. Perché non dovrebbe farlo? Certo, oggi c'è molto chiasso in città, ma spesso ce n'è stato negli ultimi due anni, e la risoluzione del problema non può essere rinviata. Archimede solleva appena lo sguardo, vede solo che un piede sta calpestando quei segni, e dice placidamente: "Lascia stare i miei circoli!". Quasi nello stesso istante la spada del legionario pone fine ai suoi giorni.

Sapeva il soldato che uccideva Archimede? Voleva spacciare il "mago" per salvare Roma e le legioni malgrado l'ordine rigoroso di Marcello di risparmiarlo?

Marcello fu assai spiacente quando seppe dell'accaduto. Fece seppellire Archimede con tutti gli onori e gli elevò un monumento funebre che però rimase per secoli dimenticato e fu ricoperto da pruni e spine. Cicerone lo rintracciò, trovò su di esso la sfera inscritta nel cilindro e dimostrò al mondo che Archimede non era un mito, ma un uomo realmente vissuto. Un uomo – aggiungiamo noi – il cui dèmone ebbe nella storia dello spirito umano una forza raramente sorpassata: tanto rivoluzionario, tanto nuovo, tanto ricco di conseguenze fu tutto quello che intraprese e portò a termine.

Adesso però col nostro tappeto magico dobbiamo tornare indietro nel tempo in cui ci siamo già soffermati; dobbiamo ricercare gli antenati spirituali di que-

sta strana figura, altrimenti essa riuscirebbe per noi ancor piú incomprensibile.

Abbiamo già detto qualche cosa degli eleati, della scuola di filosofia fondata dal grande Parmenide. Era una scuola che riteneva l'Essere eterno e immutabile come il massimo principio del mondo e riduceva a semplice apparenza ogni cosa in via di trasformazione, una scuola della quale si può dire che Zenone coi suoi paradossi sofistici rappresentasse un'eco caricaturale. Anche se l'equivoco che si celava in queste capriole mentali fu presto chiarito e ricondotto alla sua giusta misura per opera di spiriti piú illuminati, pur tuttavia il nocciolo sostanziale della sapienza eleatica rimase profondamente radicato nella filosofia greca, poiché ben si adattava al carattere di questo popolo in perpetua ricerca dell'armonia. E il concetto eleatico sopravvive nell'insegnamento platonico delle Idee eterne, prototipo di tutto ciò che esiste, di ogni realtà imprecisa ed impura. È di là che questa dottrina fondamentale di una eternità in sé immobile si trapianta in Aristotele, finché trova la sua espressione piú completa nella matematica prettamente statica e superlativamente chiara di Euclide. Per Euclide infatti un cerchio non è il risultato di un giro di compasso e neppure il risultato già piú astratto del movimento di un raggio, di un segmento che ruota intorno a uno dei suoi estremi, ma l'insieme o il complesso di tutti i punti che si trovano alla stessa distanza da un punto prescelto detto centro. Si esprime cosí, secondo il linguaggio eleatico, non il formarsi del cerchio, ma l'essenza del cerchio. Ancora piú evidente è questa differenza sostanziale nel caso di curve piú complesse; cosí per esempio, come nota giustamente lo Czwalina, Archimede descrive nel modo seguente la spirale da lui scoperta e chiamata poi col suo nome: "Se un raggio ruota con velocità uniforme intorno al suo punto d'origine e ritorna alla sua posizione di partenza dopo un numero qualsiasi

di rivoluzioni, e se un punto si muove con velocità uniforme su questo raggio, a cominciare dall'origine, quel punto descrive una spirale". Viceversa Euclide, dice Czwalina, per non smentire se stesso avrebbe dovuto descrivere staticamente la stessa curva così: "Sia dato un raggio e un punto fuori di esso. Consideriamo il complesso di tutti i punti per i quali la distanza del punto dato dall'origine del raggio varia come l'angolo formato da quel raggio rispetto all'angolo formato da questa distanza".

Da questo esempio si vedono chiaramente i limiti della forma di rappresentazione euclidea. L'esclusione di ogni trasformazione, di ogni movimento, fondata da un punto di vista logico e generale, conduce a una rappresentazione sempre piú rigida e confusa, quando si tratta di problemi o di definizioni complesse. Ma la differenza non consiste soltanto in questo: dobbiamo ricercarla in luogo piú profondo e nascosto, e perciò il nostro tappeto magico ci porterà di nuovo a Parmenide.

Abbiamo già detto che la filosofia dell'essere era assai conforme alla mentalità degli elleni, tutta rivolta all'armonia. I greci odiavano tutto ciò che era privo di forma e di confine, e non volevano toccare quelle cose che, superando la misura umana, appartenevano propriamente agli Dei. Prometeo, che aveva compiuto imprese sovrumane, era stato incatenato al Caucaso, e le aquile di Zeus gli divoravano il fegato.

C'è forse un significato simbolico nel fatto che, quasi contemporaneamente a Parmenide, fautore dell'immobilità, all'estremo opposto del mondo ellenico, a Efeso, cominciasse a insegnare un uomo, che era assai vicino al Caucaso, e non solo fisicamente, un uomo che scatenò nell'Ellade tutto il fuoco di Prometeo o per lo meno creò la base spirituale di questo avvenimento? Quest'uomo si chiamava Eraclito, e già nell'antichità fu denominato l'"oscuro Eraclito", non tanto per la

concisione epigrammatica delle sue sentenze, quanto per il contenuto dei suoi insegnamenti riflettenti quella seconda natura dello spirito greco che talvolta veniva alla luce con la violenza di un'eruzione e faceva tremare il cosmo faticosamente costruito, l'armonia penosamente raggiunta. Eraclito contrappose all'essere degli eleati l'eterno divenire. "Tutto scorre" e "il contrasto è padre di tutti gli eventi" sono le sue affermazioni fondamentali, le quali fanno dell'eternamente immobile l'eternamente mutevole e dell'essere un vago punto di passaggio tra il passato e il futuro. Questa dottrina, come l'eleatica, agisce in modo decisivo nel campo della matematica, poiché la linea, secondo Eraclito, non è piú una collana di punti uno vicino all'altro e distinti tra di loro, bensí viene concepita come la traccia di un punto mobile ed è perciò continua. Con ciò viene anche introdotto in qualche modo nella geometria il concetto di infinito, interdetto ai mortali e comprensibile solo agli Dei, poiché un continuo, per essere veramente tale, deve consistere di innumerevoli punti (*).

Ma non fu soltanto l'insegnamento di Eraclito ad accompagnare quell'epoca, di cui già abbiamo rappresentata la corsa verso la perfezione formale di Euclide. Oltre l'oscuro problema degli irrazionali, vennero posti durante questi secoli, specialmente nel quinto secolo a. C., i tre cosiddetti problemi classici della matematica, i quali con la loro difficoltà di risoluzione dimostravano in modo evidente l'esistenza di lati misteriosi che facevano dubitare e disperare della possibilità di raggiungere un'armonia completa e definitiva. Anzitutto il problema della trisezione dell'angolo e il problema delico o della duplicazione del cubo, quest'ultimo per giunta accompagnato da un'aura di mi-

(*) Non parliamo ancora, a questo punto, delle diverse "potenze" degli aggregati infiniti nel senso della teoria degli aggregati.

stico terrore. Spinti dalle avversità e dalle epidemie, i delii si erano rivolti per aiuto all'oracolo di Delfo, e là avevano appreso che la collera del dio poteva essere placata solo raddoppiando l'altare esistente a Delo. Ora questo altare aveva la forma di un cubo e dopo molti tentativi si dovette riconoscere che la risoluzione del problema non era possibile col solo aiuto della riga e del compasso, cosa che oggi per noi è subito evidente, perché la duplicazione del cubo implica un'equazione di terzo grado (cubica) $x^3 = 2\,a^3$, e con la riga e il compasso si possono risolvere al massimo equazioni quadratiche. Il terzo problema era quello della quadratura del circolo, del quale, come abbiamo accennato, si era già occupato Anassagora.

È fuori del nostro compito riferire tutti i molteplici e geniali tentativi compiuti per la risoluzione di questi tre problemi, dei quali, è doveroso riconoscere, si ebbero anche soluzioni effettive e degne di considerazione. Vogliamo solo dire che la risoluzione di questi problemi dette lo spunto a tutta una "geometria del movimento", con la scoperta di curve sempre nuove e sempre piú complicate (*). La cosiddetta "inserzione" non era altro che l'aggiunta di una costruzione basata sul movimento ai mezzi allora usati della riga e del compasso.

A questo punto apparve un altro mistero, manifestatosi in occasione della ricerca della quadratura del circolo. Mentre infatti una parte dei matematici era convinta che la misura di superfici o di volumi di figure curvilinee dovesse per necessità di cose condurre a risultati irrazionali, cioè sempre approssimati, l'altra parte credeva semplicemente all'insufficienza dei metodi a disposizione. Una conoscenza piú approfondita avrebbe dovuto permettere di ottenere risultati

(*) Come per esempio la famosa "quadratrice" (in greco *tetragonizousa*), costruita da Ippia come risultato di un moto rotatorio e di uno progressivo.

razionali. Il caso volle che la seconda opinione ricevesse sostegno e conferma in modo evidente dalla costruzione delle lunule di Ippocrate da Chio. Ippocrate era infatti riuscito incontestabilmente a porre le sue lunule, cioè figure limitate da ogni parte da linee curve, in un rapporto strettamente razionale con un triangolo rettangolo. Per la geometria di allora era cosa facile trasformare questo triangolo in un quadrato di area equivalente, e in tal modo si ebbe la prima perfetta "quadratura" di una figura curvilinea. Nessuno poteva perciò affermare ancora che l'area di figure di questo genere fosse per sua natura esprimibile solo mediante numeri irrazionali.

Le grandi speranze suscitate da Ippocrate in tutti quelli che si affannavano intorno alla quadratura del circolo non furono tuttavia realizzate, e si dovette un'altra volta ricorrere ad un metodo che portava la macchia incancellabile del vietato "infinito". Abbiamo già detto che l'atomista Democrito aveva determinato per primo il volume della piramide e del cono come il terzo del prisma e rispettivamente del cilindro di ugual altezza e di ugual base, tagliando le figure in sottili strisce. Questa era né più e né meno che un'operazione con grandezze infinitamente piccole. Si possedeva però per la quadratura e la cubatura un altro metodo, consistente nel riempire sempre più la figura curvilinea con figure rettilinee e nel sommare infine tutte queste figure rettilinee. Se questo metodo non doveva essere un semplice procedimento approssimativo, bisogna bene o male formare una somma di infiniti addendi. Come si doveva procedere? E anzitutto, una somma di questo genere non avrebbe dato come risultato una grandezza infinita, pur essendo gli addendi piccolissimi? Un problema sull'altro, e contraddizione su contraddizione. Ma il risultato ottenuto da Ippocrate con le sue "lunule" non dimostrava la possibilità di una quadratura razionale?

In mezzo a questa incertezza di concetti sorse un'altra mente eccelsa, la cui opera non sarà mai abbastanza esaltata, perché è giunta fino ai nostri giorni, conservando tutto il suo valore. Eudosso, un contemporaneo di Platone, sciolse infatti d'un sol colpo il dilemma tra "finito" e "infinito", introducendo il concetto di "piccolo a piacere" e istituendo con rigore logico il cosiddetto "passaggio al limite". Egli spiegò la cosa in questo modo: "Quando da una grandezza si toglie la metà o piú della metà e si ripete questa operazione quante volte si vuole, si può sempre arrivare a una grandezza che è minore di qualsiasi grandezza data della stessa specie". Secondo Eudosso possiamo perciò inoltrarci quanto vogliamo nelle quantità piccole a piacere. La successione delle grandezze in base alla condizione data, che noi oggi chiamiamo condizione di convergenza, si avvicina sempre piú allo zero. Oggi scriviamo l'enunciato di Eudosso: $\lim \alpha.\beta.\gamma... = 0$ per $\alpha, \beta, \gamma \leqslant \frac{1}{2}$, e sappiamo che questa progressione è effettivamente convergente. La sua somma totale deve perciò dare un risultato finito, poiché il numero sempre crescente degli addendi viene controbilanciato dalla loro piccolezza sempre maggiore. La progressione e la serie formata con essa hanno un valore limite, che per la progressione è zero e per la serie è un numero finito. Il concetto di Eudosso era tutt'altro che semplice teoria: lo vediamo infatti applicato in parecchi luoghi degli *Elementi* di Euclide. Questi dimostra per esempio il teorema che due cerchi stanno tra loro come i quadrati dei loro diametri, considerando i cerchi come poligoni aventi un numero di lati grande a piacere, e avendo già dimostrato che poligoni simili inscritti stanno nello stesso rapporto dei quadrati dei diametri dei cerchi nei quali sono inscritti. Per dimostrare che il cerchio può realmente esser considerato come un poligono con un numero di lati grande a piacere, si

sostituiscono ai segmenti che rimangono tra il poligono e la circonferenza dei triangoli, i quali soddisfano progressivamente alla condizione di Eudosso e la cui grandezza può essere resa inferiore a qualsiasi misura determinata. Con questo il cerchio è "esaurito", e perciò nel secolo decimosesto questa dimostrazione veniva chiamata "dimostrazione per esaustione". In un altro punto Euclide adotta questo metodo di dimostrazione, e cioè per provare che i volumi di due piramidi triangolari di uguale altezza stanno tra loro nello stesso rapporto dell'area delle basi. Si dice inoltre che Eudosso abbia confermato mediante la "dimostrazione per esaustione" la scoperta di Democrito riguardante il volume della piramide e del cono.

Benché gli elleni con Eudosso fossero entrati in possesso di un metodo infinitesimale rigorosamente logico, non venne loro in mente di generalizzarlo. Impiegarono al contrario la dimostrazione per esaustione in ciascun caso isolatamente, come abbiamo visto in Euclide, e continuarono a cercare le quadrature e le cubature coi metodi che a loro sembravano piú confacenti allo spirito della vera geometria.

Torniamo ora all'eroe di questo capitolo, che abbiamo lasciato al momento in cui, nell'anno 212 a. C., veniva ucciso a 74 anni dalla cieca brutalità di un soldato. La sua ultima battaglia per la "polis", per la città natale, è altamente simbolica. Essa dimostra che la matematica ellenica, nel suo orgoglioso isolamento, si rivolse alla realtà quando era già troppo tardi. "Datemi un punto fuori della Terra, e io la farò spostare dalla sua orbita", diceva orgogliosamente questo stesso Archimede, il quale riuscí, è vero, a distruggere qualche nave da guerra romana, ma non poté salvare se stesso e il suo popolo dalla rovina. Che cos'è dunque questa "realtà", dalla quale la matematica può trovarsi piú o meno lontana? A questa domanda dobbiamo ora rispondere.

Il nostro spirito ha due possibilità formali per ricavare dal caos originario un ordinato universo. Queste possibilità o forme dell'intuizione sono, secondo Kant, lo spazio e il tempo. Il moto provvede però a riunirle, e le cose viventi partecipano dell'una e dell'altra. Gli antichi elleni erano inclini a dare maggiore importanza allo studio dello spazio formale, che è propriamente il mondo dell'occhio; cercavano disperatamente, per dirla in linguaggio moderno, di formarsi una "visione istantanea" del mondo, e di analizzare poi le sue proprietà oppure di creare addirittura queste proprietà. L'architettura e la plastica sono le forme espressive artistiche di questa conformazione spirituale. Viceversa i seguaci di Eraclito, i fanatici del "*panta rei*" (tutto scorre) volevano solo considerare, per così dire, la cinematografia degli avvenimenti e interpretare ciò che esiste dal punto di vista del divenire. La loro posizione fondamentale è perciò dinamica e storica, non già storica nel senso di indagine storica, ma nel senso di considerare il mondo dal punto di vista dello sviluppo storico. Ora l'esagerazione del concetto eleatico conduce dalla realtà a una specie di nirvana, mentre lo slancio prometeico della scuola di Eraclito degenera nella mania del progresso e dell'estrinsecazione. Alla vita reale però, la cui legge è – secondo le parole dei pitagorici – appunto l'assenza di leggi dell'irrazionale, non può essere sufficiente una sola di queste due concezioni. Allo stato di felicità, alla "*eudousia*" può ben corrispondere l'essere, ma all'eterna lotta che contraddistingue le cose viventi si addice meglio il concetto di un tumultuoso divenire.

Per via di questa costituzione mentale la matematica greca fino ad Archimede non si curò di utilizzare la meccanica come ponte per introdurre nel mondo della realtà una tecnica che vi era già contenuta allo stato potenziale. Per secoli questa deficienza fu compensata dalla superiorità fisica e morale degli uomini,

ma quando l'Ellade venne a conflitto con la capacità organizzativa e con la piú elevata moralità pubblica di Roma, si vide, in occasione dell'assedio di Siracusa, che l'ellenismo si era sacrificato in massa per l'ideale euclideo della purezza formale. Era oramai troppo tardi; non poteva un uomo solo, neppure un Archimede, scongiurare la catastrofe. Da allora in poi Roma cominciò lentamente a utilizzare per i propri scopi di egemonia mondiale lo spirito greco, risvegliatosi alla realtà nell'atto di morire.

Non vogliamo però essere ingiusti. A un uomo come Archimede fu possibile, malgrado tutto, applicare la matematica alla realtà solo costruendo sulle sicure e inattaccabili fondamenta euclidee.

In che cosa dunque Archimede si distinse dalla maggioranza dei suoi predecessori? Perché il suo pensiero e le sue opere ci attraggono talmente per la loro modernità? È il suo modo di agire prometeico in tutti i campi che suscita questa impressione. Egli si mise contro tutti i pregiudizi per amore della "realtà". Questa realtà però lo spinse sempre piú lontano, poiché essa non tollera alcun indugio contemplativo su pure forme e proporzioni. In natura s'incontrano assai di rado figure geometriche anche a metà approssimate: tutto è corporeo, e i corpi sono irregolari. Si deve assalire questa irregolarità con artifizi d'ogni genere, si deve anzitutto creare un metodo per trattare l'irregolare, si deve cioè trovare una via per dominare ciò che è tortuoso e senza forma definita. Problemi di questo genere spingono però di necessità la mente all'irrazionale o all'infinitesimale, poiché la misura parte sempre dalla retta, e perciò ogni curva dev'essere rettificata, ogni superficie limitata da curve dev'essere "quadrata" e ogni volume dello stesso genere dev'essere ridotto a cubo. Tuttavia ciò non implica in fondo nessuna importante deviazione dal calcolo aritmetico.

Archimede non schivò nessuno di questi problemi.

Egli era infatti uno dei piú abili calcolatori di tutti i tempi. Il fatto che il valore di π si trovasse tra $3\frac{1137}{8069}$ e $3\frac{1135}{9347}$ (e in modo abbreviato esso fu da lui introdotto nella matematica sotto la forma $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{10}{70}$) è per lui una cosa altrettanto risaputa quanto le estrazioni di radice $\sqrt{349540} \sim 591\,1\frac{1}{8}$ oppure $\sqrt{3} \sim \frac{265}{153} \sim \frac{1351}{780}$, dove il segno $\sim$ significa per noi che si tratta di un valore approssimato.

Una volta, durante una discussione alla corte del figlio del re di Siracusa, Gelone, venne affermato che il sistema greco di scrittura dei numeri non si prestava alla rappresentazione dei numeri molto grandi e che ci si sarebbe potuti perdere, con espressione piú estetica che scientifica, nell'infinità della grandezza, sia verso l'alto che verso il basso. Archimede in quell'occasione portò forse come esempio dell'infinitamente piccolo una serie geometrica decrescente, del tipo 1, 1|4, 1|16, 1|64..., che presto si perde nell'oscurità di una estrema piccolezza. Che cosa avviene però con l'infinitamente grande? Si può far vedere anche questo sulle figure, coi triangoli decrescenti? No, non si può. È possibile, cosí disse uno dei presenti, dimostrare l'esistenza di tali grandezze solo in natura. Il numero dei granelli di sabbia sulle spiagge della Sicilia doveva essere sicuramente incommensurabile, infinito.

Alcuni giorni dopo, il principe Gelone ricevette uno scritto le cui prime frasi erano di questo tenore: "Alcune persone, o principe Gelone, credono che il numero dei grani di sabbia sia di grandezza illimitata. Non parlo già della sabbia che si trova intorno a Siracusa, oppure in tutta la Sicilia, ma della sabbia esistente su tutta la terraferma, abitata o disabitata. Vi sono degli altri, i quali non considerano già questo

numero come illimitato, ma ritengono che non sia stato mai nominato un numero tanto grande da superare quello dei grani di sabbia. Se ora queste persone concepissero un mucchio di sabbia grande quanto la Terra, dopo aver riempito tutti i mari e colmato tutte le depressioni fino all'altezza delle piú eccelse montagne, a maggior ragione dovrebbero credere che non vi sia a disposizione nessun numero capace di superare la quantità di questa sabbia. Cercherò ora di dimostrare con esempi geometrici, dei quali tu, o principe, vorrai convenire, che tra tutti i numeri da me nominati nel mio scritto indirizzato a Zeusippo alcuni superano non solo il numero dei granelli di sabbia di un mucchio grande quanto la Terra riempita come ho detto sopra, ma anche quello di una quantità di sabbia grande quanto tutto l'Universo".

Archimede mantiene la parola, e dimostra che è cosa facile costruire delle cosiddette "ottadi", cioè gruppi di numeri del sistema decimale, il primo dei quali è la miriade alla seconda potenza, cioè 10^8 o 100.000.000. La seconda ottade va da (10^8+1) fino a 10^{16}, la terza da $(10^{16}+1)$ fino a 10^{24}, e cosí via fino a $10^{800.000.000}$, cioè un numero con 800.000.000 di zeri. Con questo però è esaurito solo il "primo periodo", sul quale si può costruire ancora o che si può anche prendere come unità inventando una nuova parola che lo contraddistingua, e cosí via. Se ora si presume che un granello di sabbia sia la decima parte di un seme di papavero, quaranta dei quali entrano nella larghezza di un dito; se si ammette inoltre che la circonferenza della Terra sia di 55.000 km. (in realtà sono 40.000) e che il Sole disti dalla Terra 925 milioni di chilometri (in realtà sono 150 milioni), se infine si considera il sistema solare come una minuscola parte della sfera dell'Universo (cielo delle stelle fisse), il cui diametro stia all'orbita della Terra come quest'orbita rispetto alla sua distanza dal centro, si ottiene allora come dia-

metro dell'Universo $9\frac{1}{4}$ miliardi di chilometri o quasi un anno-luce, come si dice oggi. Ebbene, questa sfera sarebbe già riempita da 10^{63} granelli di sabbia, cioè da un numero che si trova ancora al principio del "primo periodo", un numero della settima "ottade".

Dobbiamo soffermarci ancora un poco su questo sguardo rivolto verso l'infinitamente grande. Anzitutto ci accorgiamo che lo spirito rivoluzionario e prometeico di Archimede non si spaventa di abbandonare la "terra abitata" del suo amico Eratostene, il "signor Beta" (*), grande bibliotecario di Alessandria, avventurandosi con Aristarco da Samo nello spazio stellare. Aristarco aveva già abbandonato il sistema geocentrico ed era passato al sistema eliocentrico, ma la sua concezione non penetrò nel mondo antico. Bisognerà aspettare fino a Copernico e a Galileo perché il sistema di Aristarco venga ripreso. Archimede per conto suo era geocentrico, ma probabilmente non respingeva il sistema di Aristarco, poiché doveva già comprendere appieno la relatività di tutti i movimenti. Secondariamente, in questo calcolo dei grani di sabbia ci colpisce l'analogia dell'enormità dei numeri con gli esempi indiani: in realtà, questi numeri iperbolici non si trovano in nessun altro luogo della matematica antica.

L'abilità aritmetica di Archimede non si esaurisce qui, e neanche nella rettificazione e quadratura del cerchio, i cui risultati (esatti a meno di una differenza dello 0,6 per mille) abbiamo già riferiti. Erano sorti infatti in altre occasioni problemi di calcolo piú gene-

---

(*) A quanto pare, Eratostene veniva chiamato con questa specie di soprannome, perché era la seconda mente dell'antichità in tutti i campi. La prima lettera α veniva riservata, in segno di venerazione, ai grandi spiriti del passato. Questo è lo stesso Eratostene inventore del "crivello dei numeri", l'unico metodo ancor oggi usato per il computo dei numeri primi.

rali, che si devono considerare come algebrici. Così, nella quadratura della spirale si ha la somma di una serie aritmetica di second'ordine. Elementarmente parlando, si tratta di un'addizione, prolungata quanto si vuole, di numeri al quadrato, come $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + \ldots + n^2$. Con incredibile acutezza Archimede dimostra che il risultato, trasformato secondo le nostre notazioni, è dato dalla formula $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n\,(n+1)\,(2n+1)$. È pure cosa facile per lui la somma della serie geometrica convergente $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots$ che si presenta nella quadratura della parabola. È dubbio che Archimede nell'effettuare quest'ultima somma avesse chiaramente il concetto di una somma di infiniti termini di una serie evidentemente convergente, come lo abbiamo noi oggi secondo la formula $s_\infty = \frac{a}{1-q}$, per cui nel caso di $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots$, $s_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{4}}$ darebbe come risultato $\frac{4}{3}$. La dimostrazione per esaustione, da Eudosso in poi, non si applica infatti intenzionalmente all'infinitamente piccolo. Si dice anzi che l'"esaurimento" del segmento di parabola mediante triangoli, la cui superficie è sempre un quarto di quella dei triangoli precedenti, può prolungarsi all'infinito; continuando il procedimento fino a una grandezza piccola quanto si voglia, sempre si troveranno dei triangoli ancora piú piccoli. Archimede afferma precisamente che la somma della suddetta serie (cioè la somma finale di n termini) differisce sempre da $\frac{4}{3}$ di un terzo del termine piú piccolo raggiunto,

cioè $s_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$. Se ora rimane sempre una differenza, sia pure piccola a piacere, ne deriva l'impossibilità che la somma dei triangoli sia maggiore del segmento di parabola. Ma poiché inoltre questa differenza può essere fatta inferiore a qualsiasi grandezza a piacere, si deve concludere che il segmento di parabola non può neanche essere inferiore a $\frac{4}{3}$ del triangolo iniziale. O piú brevemente, nessuna delle due superfici può essere maggiore dell'altra, perciò le due superfici sono uguali. Per conseguenza la superficie del segmento è $\frac{4}{3}$ del triangolo di partenza.

Archimede non si è però fermato al cerchio, alla parabola e alla spirale. Mediante altre acute e geniali dimostrazioni per esaustione ha determinato, per primo nella storia della scienza, la superficie e il volume della sfera, pari l'una a $4r^2\pi$, e l'altro a $\frac{4}{3}r^3\pi$. Il numero π non viene naturalmente indicato nei suoi scritti come siamo abituati oggi: ci serviamo della scrittura moderna solo per maggior chiarezza. Lo stesso valga quando diciamo che il maggior orgoglio di Archimede consiste nell'aver stabilito la relazione $V_1 : V_2 : V_3 = \frac{4}{3}r^3\pi : 2\,r^3\pi : \frac{2}{3}r^3\pi = 2:3:1$, indicante il rapporto tra i volumi della sfera, del cilindro e del cono, quando la base del cilindro e del cono è uguale alla superficie di un cerchio massimo della sfera e i primi due solidi hanno per altezza il diametro della sfera.

Ma non si fermò neanche qui. Determinò per primo la superficie dell'ellisse pari a $F = a\,b\pi$, essendo a e b i due semiassi. In un'opera sul conoide e sullo sferoide trovò il volume del paraboloide di rotazione (conoide), dell'ellissoide e dell'iperboloide di rotazione

(sferoide). Si tratta in complesso di tutta una geometria infinitesimale, applicata alle curve note e ai solidi di rotazione generati da queste curve, la cui piena consapevolezza e l'ordinato svolgimento potrebbero essere contestati solo da qualche arrabbiato dottrinario.

Un'altra domanda interessante è in che modo Archimede sia pervenuto ai suoi grandiosi risultati. Su questo argomento ci ha illuminati una fortunata scoperta, fatta nel 1906 dallo scienziato danese J. L. Heiberg, studioso di Archimede. In un palinsesto decifrato da Heiberg e Zeuthen dice infatti Archimede stesso, con tutta semplicità, in una lettera ad Eratostene: "Molte cose che mi sono prima riuscite chiare attraverso la meccanica sono state poi dimostrate con la geometria, poiché la trattazione col metodo meccanico non era ancora basata su una dimostrazione; è infatti piú facile determinare la dimostrazione quando prima si è raggiunta col metodo meccanico una rappresentazione dei problemi in esame, che trovarla senza una rappresentazione preliminare". Questa testimonianza dello stesso Archimede non si può trascurare: essa è valida del resto per ogni creazione matematica. La scoperta di singole verità avviene di preferenza per via analitica o meccanica, oppure attraverso l'"esperimento matematico", attribuito già a Pitagora. Ed è assai verosimile che Archimede nella determinazione dei volumi abbia lavorato in primo luogo da meccanico con la bilancia, e abbia poi pensato alla dimostrazione geometrica, il che non diminuisce i suoi meriti, poiché le sue dimostrazioni geometriche passarono ai posteri come modelli di forza sintetica e di perfezione formale. Esiste anche un altro modo di realizzare scoperte matematiche, chiamato "magico" da Spengler e designato da Leibniz col nome di "cabbala vera", o arte lullica, ma non è qui il luogo di parlarne poiché quest'arte non esisteva sul suolo greco né ai tempi di Archimede. Qui vediamo per la prima volta la mec-

canica e la geometria del movimento (spirale, solidi di rotazione, ecc.) introdursi nel campo rigorosamente statico della matematica euclidea.

C'è però un capitolo della meccanica che da Archimede in poi ha conservato una particolare posizione intermedia tra la matematica e la fisica, e ancor oggi ha un'enorme importanza. Intendiamo la statica, la scienza dell'equilibrio tra corpi immobili, cosí rigorosamente fondata da Archimede e da lui stesso portata a grande perfezione. Non sarà mai detto abbastanza chiaramente che una statica matematica senza gl'infinitesimi non sarebbe concepibile. Già il centro di gravità di per sé non è solo un possibile punto di appoggio di un corpo, ma rappresenta la finzione che tutto il peso della figura considerata sia concentrato in quest'unico punto privo di estensione. D'altra parte vi può essere equilibrio solo quando esiste un peso. Già Archimede supera di colpo questa condizione apparentemente ovvia dimostrando valide per le figure geometriche tutte le proprietà degli oggetti dotati di peso: equilibrio, baricentro, linee baricentriche, ecc. Poiché le figure prive di estensione non possono avere una massa, e quindi neanche un peso, questo passaggio è piú ardito di quanto oggi ci appaia. Noi siamo abituati da secoli a questa forma di rappresentazione, la quale presuppone per esempio che un triangolo fatto di legno (in realtà un sottile prisma) si faccia diventare sempre piú sottile, fino a raggiungere lo spessore della carta. Facendo ora scomparire del tutto lo spessore, vediamo quali proprietà statiche rimangono valide. Ebbene, il baricentro rimane il medesimo, cioè lo vediamo sempre nello stesso punto, per quanto si diminuisca lo spessore. Lo stesso vale per le linee baricentriche e per i rapporti di peso e di distribuzione dei pesi rispetto ad altre figure piane di spessore uguale. Quando ora il peso e la sostanza si siano completamente volatilizzati, quando la figura si sia ridotta a

uno schema geometrico, questi rapporti rimangono sempre validi, benché si richieda una forza d'astrazione eccezionale per parlare del centro di gravità e dell'equilibrio di ombre senza peso. Comunque si giri la cosa, la contraddizione non si risolve senza gl'infinitesimi; e anche l'analogia con le figure geometriche, le quali nel mondo della realtà esistono ancor meno, è assai tenue. Infatti le figure geometriche sono null'altro che forme, rapporti di grandezze, e le considerazioni statiche con esclusione di masse soggette alla gravità, all'infuori che dei corpi materiali, perdono ogni senso.

Comunque sia, Archimede approfondì audacemente questa parte della meccanica. Aveva chiare le leggi della leva, trattò col metodo infinitesimale i rapporti delle aree di figure in equilibrio tra di loro, dividendole in strisce infinitamente sottili, e fu un precursore nel campo dell'idrostatica con la scoperta del "principio di Archimede" (*), con la determinazione del concetto di peso specifico dei corpi e con le leggi del galleggiamento e della stabilità di galleggiamento (altezza metacentrica). E la sua vasta conoscenza meccanica non solo gli permise d'inventare la celebre "vite senza fine" per il sollevamento dell'acqua e di procurare al re Gerone il piacere di varare da solo una grossa nave, ma fece sí ch'egli potesse difendere la sua città per due anni contro i romani.

Tutto questo lo fa apparire come un genio, ma non ancora come il piú grande matematico dell'antichità. La sua produttività come matematico è addirittura inesauribile, e specialmente la sua versatilità, se cosí ci si può esprimere. La scoperta che l'area del cerchio equivale a quella di un triangolo che abbia la circonferenza per base e il raggio per altezza è altrettanto magistrale quanto l'enunciazione di nuovi assiomi, co-

(*) Equilibrio del peso del volume d'acqua spostato col peso del corpo galleggiante.

me per esempio quello che la retta segna sempre la piú breve distanza fra due punti. E solo in tempi recenti venne apprezzato nel suo pieno significato un altro assioma di Archimede, cioè l'affermazione che tutte le nostre misure presuppongono la possibilità di superare la lunghezza di un segmento qualsiasi *AB* moltiplicando convenientemente un segmento minore *AC*. Questo sembra uno scherzo o una verità lapalissiana, ma è un fatto che proprio questo assioma fa appartenere tutta la nostra geometria al tipo "archimedico", mentre altri tipi "non archimedici" sono o impossibili o contraddittorî. Infine Archimede fece progredire notevolmente la stereometria, determinando e studiando i tredici solidi archimedici o semi-regolari, le cui superfici sono poligoni a 3, 4, 5, 6, 8, 10 e 12 lati; e precisamente dieci di questi poliedri sono formati ognuno da poligoni regolari di due tipi e gli altri tre ognuno da poligoni di tre tipi.

Si riscontrano in Archimede, a migliaia d'anni di distanza, le caratteristiche della vera grandezza mentale dell'uomo. Egli stesso fu il grande maestro del metodo di "esaustione"; la sua opera, però, per quanto apparentemente di piccola mole a giudicare dal numero delle pagine, è difficilmente "esauribile". Tanto meno è comprensibile il miracolo per cui entro cicli culturali rigorosamente chiusi sorgono uomini che con le loro azioni arrivano a influenzare le civiltà non ancor nate del futuro. Questo però è il concetto piú dinamico e reale della creazione di valori "eterni", dell'"immortalità" potenziale di ogni nobile opera. Diciotto secoli piú tardi lo spirito faustiano dei popoli occidentali doveva infatti riprendere il cammino dal punto in cui il soldato romano aveva ciecamente distrutto i circoli disegnati da quella mente titanica.

IV

APOLLONIO DA PERGA

Matematica e virtuosismo

Due tipi di uomini dominano lo sviluppo della scienza come quello dell'arte; due tipi nettamente distinti, spesso in lotta fra loro, sostenuti tanto l'uno come l'altro da partigiani pronti a combattersi a sangue, uomini che dànno lo spunto a savi ed acuti apoftegmi circa l'essenza della "vera" scienza e della "vera" arte.

È assai difficile stabilire in che cosa questi due tipi differiscano, poiché, come in tutte le cose viventi, innumerevoli chiaroscuri e punti di contatto conducono dall'uno all'altro. Ogni definizione sommaria sarebbe falsa, ma noi dobbiamo cercare ugualmente di distinguere queste diverse forme sotto le quali si presenta il genio, perché altrimenti non potremmo intendere gli uomini che hanno un'influenza decisiva sullo sviluppo spirituale ed artistico dell'umanità.

In ogni caso — ed è la prima differenza — un tipo come Archimede, pur conoscendo l'incanto delle pure forme, cerca di dominare e di superare la realtà non solo con la perfezione formale, ma anche col contenuto. Vuol sapere tutto, fino in fondo, e non si riposa un attimo in questo lavoro. Corre con audace impazienza da una nozione all'altra, e perciò la sua opera porta più che mai l'impronta dell'incompiutezza, della saltuarietà, della slegatezza. L'altro tipo viceversa si applica spesso a un unico lavoro, che viene portato a una perfezione ineccepibile e si stacca poi

dal suo creatore come un essere dotato di vita propria, raggiungendo per conto suo l'eternità.

Si parli pure, come avvenne piú tardi, di concezione classica e romantica, di "furia" e "morbidezza" (secondo i termini della pittura veneziana), di forma e contenuto, di statica e dinamica, di essere e divenire, di armonia e libertà di forma, di calma olimpica e audacia titanica, di anima euclidea e faustiana, di temperamento apollineo e dionisiaco: è un fatto che in tutte le civiltà si notano questi due tipi. E per essere piú chiari diremo che Archimede e Apollonio stanno fra loro nello stesso rapporto come, per esempio, Leibniz a Eulero, o Wagner a Mozart, Leonardo a Raffaello, Tintoretto a Tiziano.

Si può affermare che tanto un tipo come l'altro sono necessari per lo sviluppo delle arti e delle scienze e che entrambi, ognuno nel suo campo, possono aspirare nello stesso modo all'immortalità e dischiudere nuove categorie di conoscenze, che è, secondo Georg Simmel, la caratteristica del vero genio. D'altra parte l'affermazione che solo la forma è eterna, è assai contestabile. Che cosa significa eterno? È eterno ciò che rimane inalterato nel tempo, oppure ciò che piú tardi risulta parte integrante e gradino del successivo progredire, oppure ancora ciò che è penetrato cosí profondamente nel nostro patrimonio culturale, finanche nella lingua e nel pensiero, da far sí che la sua presenza sia appena distinguibile? I formalisti staranno per la prima definizione, i fautori del contenuto per la seconda, tenendo conto naturalmente che né i primi possono completamente straniarsi dal contenuto né i secondi dalla forma. Qui si parla infatti delle opere piú eccelse.

Abbiamo voluto premettere tutto questo per distinguere meglio il genio di Archimede da quello di Apollonio. Archimede viene chiamato ovunque il piú grande matematico dell'antichità, talvolta perfino il mas-

simo matematico di tutti i tempi. Apollonio invece fu chiamato già nella tarda antichità il "grande geometra", soprannome che ha conservato inalterato attraverso i secoli. Fu dunque grandissimo il primo, e il secondo soltanto grande? Oppure Apollonio fu semplicemente un mediocre trascrittore e compilatore, e Archimede un inventore di vedute assai piú larghe?

Vedremo piú tardi l'influenza capitale di questi due uomini nella creazione dell'odierna matematica. Essi vi hanno contribuito entrambi: Archimede introdusse il concetto degli infinitesimi, Apollonio quello delle coordinate, entrambi premessa indispensabile per la creazione e la formazione della nostra "matematica superiore".

Quando i giudizi e gli apprezzamenti non sono sicuri, la cosa migliore è analizzare piú profondamente il problema, poiché c'è da aspettarsi a priori una farragine di incomprensioni e di interpretazioni partigiane nel campo della cultura e della critica. Esamineremo perciò da principio la posizione di Apollonio dal punto di vista storico, seguendo il metodo fin qui usato, per cercare di dare alla sua opera il posto che le compete.

Apollonio era contemporaneo, ma piú giovane, di Archimede: doveva avere circa quarant'anni quando Archimede cadde vittima del ferro omicida, e già a quest'epoca aveva al suo attivo un'abbondante produzione. Apollonio era un tipico alessandrino, allievo dei primi discepoli di Euclide, e passò gran parte della sua vita nel Museion di Alessandria, trasferendosi a Pergamo solo in età avanzata. Come tutti i virtuosi della forma, non ebbe propriamente una vita e un destino tali da interessare o da commuovere. Visse, lavorò e morí. Di solito non siamo informati sulle intime lotte, le peripezie e le tempeste di uomini di questo genere. Può darsi che per essi, come per Euclide, Raffaello, Tiziano, Eulero, Aristotele, valga una

legge misteriosa. Questo tipo umano è generalmente tenuto in considerazione, onorato, conduce una vita limpida e tranquilla, talvolta anche ritirata, e gli uomini s'impadroniscono in primo luogo dell'opera, dimenticando il creatore, senza che questi si dia molto da fare per correggere l'apprezzamento dei contemporanei. Esce dal suo guscio solo per mettere a posto i guastafeste della forma, gli uomini del tipo dinamico e prometeico, da solo o con l'aiuto di pedanti e puritani ammiratori. Oppure è d'animo cosí mite da trascurare anche questo, e se ne rimane chiuso nel suo puro mondo formale.

In ogni caso la tempesta suscitata da Archimede non continuò affatto con Apollonio. Sappiamo solo che Apollonio attaccò le ricerche di Archimede in un tono dimesso, ma tuttavia leggermente offensivo, e che Archimede gli rispose, altrettanto calmo e quasi ironico, col suo "problema dei buoi". Apollonio aveva trovato un valore π piú approssimato di quello di Archimede e aveva scritto un'opera sul numero dei grani di sabbia, nella quale criticava il sistema periodico da lui proposto. Ora Archimede, secondo quel che ritiene Fr. Hultsch, proponendo il problema dei buoi volle mostrare che vi sono problemi tali da presentare grandi difficoltà anche per un Apollonio. La soluzione di questo sistema di equazioni dà infatti, secondo gli ultimi calcoli, numeri decimali con piú di 200.000 cifre.

Abbiamo già detto che Apollonio non fece progredire la matematica tipicamente "archimedica", e questo dev'essere particolarmente sottolineato, Apollonio non si preoccupava che intorno a lui la terra tremasse, che durante la sua vita si combattessero battaglie decisive per l'egemonia di Roma e che crollasse la potenza politica dell'ellenismo. Non fu spaventato dall'incendio di Siracusa, non fu scosso dall'attività inventiva di Archimede, ma si occupò di portare a una perfezione definitiva la matematica ellenica, la geometria eleatica ed

euclidea, non rimanendo tuttavia chiuso a ogni novità, ma anzi arrivando nella teoria dei numeri a risultati che si avvicinano molto al nostro sistema dei valori di posizione.

La sua opera tipica e fondamentale di virtuoso consiste però nei famosi otto libri sulle sezioni coniche, che ci sono stati tramandati quasi integralmente e dimostrano una completezza cosí stupefacente da far sparire l'ultimo dubbio sulla semplicità dei matematici greci. Il concetto di "alessandrino", nel campo della cultura, è un concetto tutto speciale, e bastano per definirlo figure come Euclide, Eratostene ed Apollonio. Questa cristallina chiarezza d'indagine, questa visione comprensiva del proprio mondo e questa perfezione nell'ambito di un campo prefissato, non furono mai piú raggiunte in seguito. L'opera degli alessandrini doveva dare la sensazione che il vertice del sapere fosse raggiunto e che non vi fosse null'altro da fare. Tale opera, per la sua stessa grandezza, fu però straordinariamente pericolosa per l'ulteriore progresso della cultura; e quanto fosse ingannevole questa credenza nella perfezione alessandrina si vide infatti chiaramente solo molto piú tardi, dopo un tempo d'arresto dell'umanità che si estese senza alcun utile per molti secoli e molti cicli di cultura, finché d'improvviso s'iniziò un nuovo inatteso sviluppo partendo da regioni ritenute fino allora d'importanza trascurabile.

Apollonio dunque si riallacciò, come è stato già detto, alla grande tradizione ellenica euclidea, a parte alcune concessioni di secondaria importanza, non solo esteriormente, ma intimamente, e portò lo studio delle curve di second'ordine, o sezioni coniche, a una perfezione non piú superata per secoli. È bensí vero che le sezioni coniche erano state scoperte in seno all'Accademia platonica come artificio per la duplicazione del cubo e furono trattate anche da Euclide in un'opera che è per noi perduta; tuttavia il fatto che Archi-

mede usi ancora le vecchie definizioni di Menecmo (quarto secolo avanti Cristo) dimostra chiaramente che neppure Euclide era giunto all'altezza di Apollonio. Menecmo e tutti i suoi successori fino ad Archimede, non avevano idee chiare circa la generazione e le proprietà delle sezioni coniche, e definivano perciò la parabola come la sezione di un piano perpendicolare al lato di un cono con angolo retto al vertice. Una sezione fatta nello stesso modo su un cono ottuso dava luogo a un'iperbole, su un cono acuto a un'ellisse. Non venivano però usate le espressioni parabola, iperbole ed ellisse, ma si parlava della "sezione di un cono rettangolo" e cosí via. Tutto questo benché si conoscessero molte proprietà delle sezioni coniche e si possedessero perfino, già al tempo di Platone, apparecchi meccanici per disegnare queste curve (compasso parabolico).

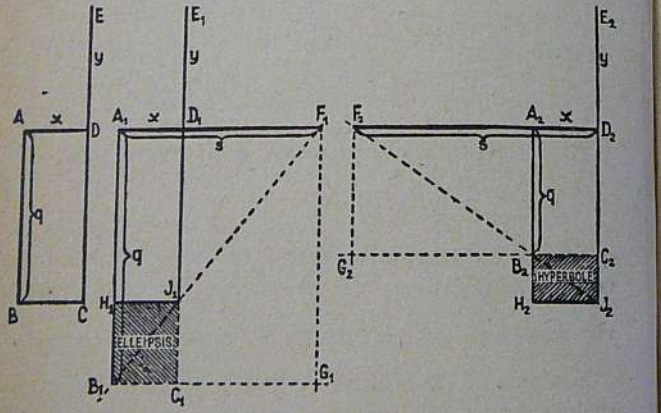
Apollonio all'inizio del suo libro generalizza subito la scienza delle sezioni coniche, per quanto era possibile farlo allora. Egli fa scorrere lungo una circonferenza una retta, tenuta ferma in un punto e prolungabile a piacere dai due lati, finché ritorna al punto di partenza. Genera in tal modo un cono di rotazione, anzi un cono doppio, e dimostra subito che si possono ottenere quattro specie di sezioni da un solo cono acutangolo: cerchio, ellisse, parabola e iperbole. La specie della curva dipende esclusivamente dall'inclinazione del piano che interseca il lato del cono. Viene cosí stabilita la generazione delle sezioni coniche, valida ancor oggi, come sezioni di uno stesso cono. Questo modo, diciamo cosí, materiale di generare tali curve non è l'unico concepibile. Del tutto indipendenti da un cono reale, vi sono diverse possibilità di generazione sotto forma di "luoghi geometrici" nel piano, derivati dalle proprietà delle curve stesse e che ci portano indietro a problemi antichissimi di algebra geometrica risalenti a Pitagora. Per la comprensione

del concetto di luogo geometrico bisogna osservare che esso era noto già da lungo tempo nella geometria greca e significava un assieme di distanze o di rapporti. La concezione di una figura come "luogo geometrico" sorge dal modo statico di considerare le cose della scuola eleatica. Cosí ad esempio un cerchio è il "luogo geometrico" di tutti i punti equidistanti da un dato punto (il centro). E la bisettrice di un angolo è il luogo geometrico di tutti i punti equidistanti dai due lati dell'angolo, e cosí via.

Naturalmente vi sono condizioni assai piú complicate per i luoghi geometrici, come abbiamo mostrato nel caso della spirale di Archimede, quando abbiamo cercato con Czwalina di darne la definizione in linguaggio euclideo. È giunto ora il momento di dire che le sezioni coniche ebbero per la prima volta da Apollonio i loro nomi odierni, e il perché di questi nomi. Spiegheremo inoltre in che modo si è potuto affermare che Apollonio da Perga sia stato l'inventore della geometria analitica.

A questo scopo dobbiamo richiamarci alle tre specie di "applicazioni" di superficie, già note a Pitagora o da lui scoperte. Il primo problema, l'applicazione parabolica, richiede di "applicare" sul segmento dato AB un rettangolo di area uguale a quella di una data superficie, per esempio un quadrato di lati ED. Si ha perciò la relazione $\overline{ED}^2 = AB.AD$. Se ora indichiamo con q il segmento AB e lo manteniamo costante, mentre facciamo variare ED a piacere, deve naturalmente variare anche AD per soddisfare la nostra equazione. Indicando il segmento $AD = x$ e $DE = y$, la nostra relazione si esprime con $y^2 = qx$, che corrisponde esattamente all'odierna "equazione al vertice" di una parabola in coordinate cartesiane. Noi moderni per certe ragioni poniamo $2p$ al posto di q; ma questo non cambia la sostanza della cosa, trattandosi di una grandezza costante.

Diciamo però a questo punto, per evitare equivoci, che Apollonio non adopera coordinate generali, già date sotto forma di assi incrociati o d'un altro sistema di riferimento, nel quale si inseriscano poi le curve a scopo di studio analitico. Apollonio al contrario procede in senso diametralmente opposto. Per lui la figura è l'oggetto principale, e certe linee ausiliarie, tracciate nella figura o quanto meno collegate strettamente con essa, forniscono nel piano certe proporzioni, mentre tutta la figura è soggetta a determinate proprietà di superficie. Come risultato la figura rimane allora definita da questi rapporti interni. In altre pa-



FIGG. 3-4

role: Apollonio non adopera coordinate nel senso cartesiano, ma definisce le coniche mediante relazioni di superficie, riconoscendo l'identità dei problemi di "applicazione", trattati esaurientemente da Euclide, con quelli delle sezioni coniche. Questo fu il suo merito imperituro. Infatti si dimostra che il "luogo geometrico" corrisponde alla condizione posta, cioè la curva descritta dal punto E è nel nostro primo caso una

parabola, quando DE cresce da zero fino a una certa grandezza.

Per completare l'argomento indichiamo le altre due "applicazioni" di superficie. Sia dato un segmento A_1B_1 e il quadrato costruito sopra E_1D_1. Sia dato inoltre un segmento A_1F_1 che forma con A_1B_1 il rettangolo $A_1B_1G_1F_1$. Si deve ora trovare un rettangolo $A_1B_1C_1D_1$ tale che, diminuito (*elleipsis*, *defectus*) del rettangolo $B_1C_1H_1J_1$ simile al rettangolo $A_1B_1G_1F_1$, dia come risultato il rettangolo $A_1D_1H_1J_1$ di area equivalente al quadrato di lato D_1E_1. Essendo la similitudine di $B_1C_1H_1J_1$ con $A_1F_1B_1G_1$ data dal fatto che il punto J_1 giace sulla diagonale B_1F_1, vale la proporzione:

$$C_1J_1 : B_1C_1 = F_1G_1 : B_1G_1$$

da cui:

$$C_1J_1 = \frac{B_1C_1 \cdot F_1G_1}{B_1G_1} = \frac{A_1D_1 \cdot A_1B_1}{A_1F_1}$$

In conformità alla premessa deve essere perciò:

$$\overline{E_1D^2}_1 = A_1B_1 \cdot A_1D_1 - A_1D_1 \frac{A_1D_1 \cdot A_1B_1}{A_1F_1}$$

Se ora indichiamo nuovamente A_1B_1 con q, A_1D_1 con x, E_1D_1 con y e infine A_1F_1 con s, otteniamo $y^2 = qx - x \cdot \frac{xq}{s}$ che è l'equazione al vertice dell'ellisse.

Esaminando per ultimo il problema noto col nome di "applicazione iperbolica" (=in eccesso), nel quale a un rettangolo $A_2B_2C_2D_2$ deve essere aggiunto un rettangolo simile $B_2C_2H_2J_2$ per ottenere un rettangolo $A_2H_2J_2D_2$ di area equivalente al quadrato $\overline{E_2D_2}^2$, varierà rispetto al problema precedente solo il segno, per cui si ottiene

$$\overline{E_2D_2}^2 = A_2B_2 \cdot A_2D_2 + A_2D_2 \frac{A_2D_2 \cdot A_2B_2}{A_2F_2}$$

Questo "eccesso" (*hyperbole*, *excessus*) caratterizza l'iperbole, se sostituiamo i nostri segmenti fissi con gran-

dezze variabili e chiamiamo q ed s le costanti. Otteniamo allora l'equazione al vertice dell'iperbole sotto la forma $y^2 = qx + x \cdot \frac{qx}{s}$ che possiamo ridurre mediante opportune trasformazioni, al pari dell'equazione dell'ellisse, alle funzioni analitiche oggi correntemente in uso.

Questo però, come abbiamo già detto, è solo l'inizio delle indagini sulle sezioni coniche. Apollonio scopre inoltre quasi tutte le piú importanti proprietà di queste curve, conosce già il secondo ramo dell'iperbole, studia diametri, fuochi e tangenti; ed è bene informato sull'intersezione di piú curve, sulla loro similitudine e su altri argomenti. Anticipa persino certe cognizioni di geometria proiettiva, o "nuova" geometria, frutto della maturità intellettuale del secolo decimonono.

In mezzo a una produzione cosí vasta non possiamo stupirci se conosce anche gli asintoti dell'iperbole e se discute sulle loro proprietà. Com'è noto, gli asintoti sono rette che si avvicinano sempre piú a un'altra linea, senza mai arrivare a toccarla o a tagliarla.

Dobbiamo ora spiegare — indipendentemente dall'opera di Apollonio, nella quale, dato il carattere della nostra *Storia*, non possiamo addentrarci maggiormente — perché la trattazione delle sezioni coniche abbia in sé e per sé cosí grande e decisiva importanza per la matematica. A questo scopo parleremo delle curve in generale e delle coniche in particolare.

A un osservatore, per quanto superficiale esso sia e poco illuminato sulle piú profonde questioni geometriche, sembrerà ovvio che ci si occupi di una curva come il cerchio, quintessenza della regolarità e profondamente radicata in certo qual modo in natura. A maggior ragione dovevano pensare la stessa cosa gli studiosi dell'antichità, per i quali tutti i corpi celesti avevano forma sferica e si movevano su orbite circo-

lari. Ma anche la tecnica e l'architettura urtavano a ogni passo in forme circolari: assi, ruote, alberi di nave, colonne, piante dei teatri (*), per citare solo gli oggetti piú comuni. Vi era poi il compasso. Molto di ciò che doveva essere eseguito in pratica veniva prima disegnato, e per il disegno si adoperava la riga e il compasso, cosicché, solo per questo modo di costruzione, la forma circolare doveva ben presto entrare direttamente e indirettamente dappertutto. E a questo punto non si può tacere la domanda se per caso il disegno costruttivo e la successiva costruzione mediante macchine utensili rotanti non abbiano determinato in modo decisivo le forme adottate nella tecnica, facendo trascurare altre forme che avrebbero potuto essere piú pratiche ed efficienti.

Tutto questo è chiaro. Ma perché lo studio di altre curve suscitò sí grande interesse? Era forse il semplice desiderio di dare un maggiore sviluppo alla geometria? Oppure c'erano motivi piú profondi? Rispondiamo subito che c'erano parecchi motivi di questo genere, ad alcuni dei quali abbiamo già accennato. Proprio in Apollonio s'incontrarono in modo singolare con la teoria delle sezioni coniche, due ordini di considerazioni prettamente matematiche, e cioè il problema della risoluzione delle equazioni quadratiche, sviluppatosi fino dai tempi di Pitagora sotto forma di "algebra geometrica" con le "applicazioni" di superficie, e il gruppo dei tre "problemi classici" la cui risoluzione richiedeva equazioni di grado superiore al secondo, problemi trattati dalla scuola platonica in poi mediante intersezione di diverse sezioni coniche e che in ultima analisi avevano portato alla scoperta delle coniche. A

(*) Nell'antichità ci si occupò a fondo di questo problema, che si studiò geometricamente, scoprendo l'uguaglianza di tutti gli angoli inscritti nella circonferenza e costruiti su una corda: donde conseguiva che in un teatro circolare tutti gli spettatori vedono la scena sotto un angolo della stessa apertura.

tutto questo si era aggiunta la scienza delle proporzioni continue e di luoghi geometrici, quest'ultima rivelante ancora una concezione statica dell'idea di funzione. Infatti una curva che soddisfa a questa o a quella condizione algebrica e viceversa una condizione algebrica che deve corrispondere in ogni istante a questo o a quel luogo geometrico, non sono in sostanza null'altro che una funzione e la sua curva rappresentativa, specialmente quando si considera una grandezza soltanto come variabile e si fa dipendere l'altra da essa.

Per non suscitare false impressioni occorre notare che furono necessari altri passi giganteschi prima di acquistare piena coscienza di queste relazioni; innegabilmente l'opera di Apollonio conteneva già in germe tutte queste cose e riuscí a effettuare una coordinazione tra l'algebra e la geometria, che però non si poté esprimere in pieno, poiché l'algebra greca era anch'essa inviluppata nella geometria. Accadde perciò il fatto singolare che tra l'algebra di stampo geometrico e la geometria vera e propria venisse a trovarsi uno strato di relazioni puramente geometriche da cui talvolta nacquero sorprendenti scoperte. Infatti c'è una grande differenza tra la geometria analitica del presente e quella dei greci. Noi oggi — e questo sarà ancora spiegato per esteso — rappresentiamo simbolicamente una funzione nella nostra notazione letterale algebrica, e otteniamo la immagine coordinata sotto la forma in apparenza enormemente diversa di una figura geometrica. Apollonio, invece, per parlar concreto, disegnava un'ellisse e fondeva con questa ellisse il disegno geometrico-algebrico della corrispondente "applicazione", per cui il primo disegno aveva un significato geometrico e il secondo un significato algebrico. Con ciò gli mancavano, è vero, i vantaggi dell'algoritmo algebrico, della "macchina mentale" algebrica, ma però poteva confrontare l'aspetto geometrico

di una figura con quello dell'altra e ottenere in tal modo nuove relazioni.

Questa non è una caratteristica delle sole sezioni coniche: lo stesso metodo sarebbe concepibile infatti anche per curve di grado superiore, benché con gravi complicazioni.

Qual è dunque il motivo principale per cui proprio alle sezioni coniche viene dato un posto così eminente tra tutte le possibili curve? Sappiamo che esse ci offrono la rappresentazione completa dell'intero campo delle equazioni di secondo grado. Ciò venne stabilito da Apollonio fino dalla definizione di queste curve. Aggiungiamo che molto più tardi venne riconosciuta la loro importanza quali orbite di pianeti e di comete, nella forma dei corpi celesti di rotazione e nella traiettoria dei corpi pesanti. Ma non è tutto. La fondamentale importanza delle coniche risiede nell'apparato sensorio dell'uomo stesso. La facoltà di apprendere dell'uomo dipende principalmente dall'occhio: egli è in primo luogo una creatura che guarda, e i raggi luminosi che penetrano nell'occhio o ne partono in direzione opposta per costituire la visione, formano un cono secondo le leggi della rifrazione e della convergenza in una lente biconvessa. Ogni immagine della realtà ottica a noi trasmessa mediante questo cono di raggi ci si presenta sotto forma di una sezione conica; ogni prospettiva e ogni proiezione devono avere necessariamente per base i rapporti tra il cono e le sue sezioni piane, e non sarebbe esagerato designare tutto il nostro mondo visibile come "mondo delle sezioni coniche". Lo spunto di queste cognizioni, approfondite fino alle ultime conseguenze nel secolo decimonono dalla geometria "proiettiva" o "nuova" geometria, si trova già in Apollonio, quando si serve dei pennelli di raggi e spiega i loro rapporti con le sezioni coniche.

Non è quindi giusto trattare la scienza delle sezioni coniche di Apollonio come un ramo a sé, che abbia

solo un'importanza accessoria e possieda al massimo un'attrattiva artistica. Certo, è un'opera artistica, direi quasi un'opera di virtuosismo artistico, oltre ad essere il primo e fino a quel tempo, per quanto ci consta, unico esempio di "matematica specializzata". Ma il suo oggetto, come abbiamo visto sopra, è d'importanza assai maggiore e decisiva, e tutto ciò indipendentemente dalle conseguenze che ebbero in generale per lo sviluppo della matematica le scoperte metodiche e le intuizioni di Apollonio.

Non si deve tralasciar di toccare ancora un punto molto importante, cioè la questione degli asintoti. Com'è noto, nella teoria delle coniche gli asintoti sono due rette che sotto certe condizioni si avvicinano sempre piú all'infinito ai due rami dell'iperbole, senza mai toccarli come fa una tangente o tagliarli come una secante. La semplice esistenza di queste linee, che siano state scoperte da Apollonio o fossero già note prima di lui, fece oscillare un'altra volta da due diverse parti tutto l'edificio della cultura euclidea. In primo luogo era cosí di nuovo all'ordine del giorno il concetto di infinito, tanto avversato e sempre respinto dall'ellenismo. Si poteva parlare anche qui, come palliativo, di avvicinamento "a piacere". Ma dove finiva questo avvicinamento? E d'altra parte era ben noto ai geometri che la parabola e l'iperbole sono curve aperte, perdentisi in qualche luogo all'infinito, delle quali perciò si conosceva la legge in un punto qualsiasi, ma non la forma completa. Veniva fuori anche un'altra grave preoccupazione, e questa aveva a che fare col postulato delle parallele. Ecco infatti inserirsi, tra le linee che si tagliano e quelle che si mantengono sempre alla stessa distanza, una terza importuna specie di linee, le quali né si tagliano né mantengono sempre la stessa distanza tra di loro. Secondo l'espressione euclidea del postulato delle parallele, il continuo avvicinarsi di due linee era la condizione necessaria e sufficiente per la

loro intersezione, mentre una distanza costante era la condizione per la non intersezione o parallelismo. Con gli asintoti veniva fuori all'improvviso che anche nell'avvicinamento non in tutti i casi vi era necessariamente un punto d'intersezione. Si poteva obiettare che in Euclide si hanno due rette, mentre per gli asintoti si tratta di una curva e di una retta, le quali possono benissimo seguire altre leggi che nel caso di due rette; tuttavia con gli asintoti era entrata nella matematica una grave difficoltà, che per secoli e secoli doveva mettere di continuo in discussione il postulato delle parallele. Poiché questo postulato — e qui sta la causa nascosta — contraddice in qualche modo, senza che in generale ci se ne renda ragione, all'evidenza dei sensi. Il mondo dell'occhio, il "mondo delle sezioni coniche", come lo abbiamo chiamato poco fa, non conosce le parallele. Nessuno che contempli il mondo reale con lo sguardo ha mai visto parallele; le rette parallele rappresentano una condizione da noi creata, una finzione, ma non una realtà ottica. Certo, possono esistere effettivamente, e lo si dimostra con le misure, come per esempio nel caso di un binario della strada ferrata, che si potrebbe concepire prolungato all'infinito, se si avesse a disposizione uno spazio e un tempo infinito. Ma sono al di fuori di ogni diretta percezione.

Apollonio da Perga, il "grande geometra", il virtuoso tra i grandi matematici dell'ellenismo, il maestro col quale si chiude l'età eroica dell'antica matematica, ha perciò — indipendentemente dal suo virtuosismo — portato in discussione piú di un problema fondamentale della matematica. E anche se egli pose in un certo senso l'ultima pietra dell'edificio della geometria greca, il futuro doveva dimostrare come questa supposta ultima pietra sarebbe diventata la prima base d'una successiva sopraelevazione.

V

DIOFANTO

La scrittura matematica

Anche se la nostra *Storia* non si prefigge l'esposizione di uno sviluppo continuo e senza lacune, ma si sforza di dare una rappresentazione opposta, studiando solo le scoperte piú salienti della matematica, rimane da spiegare il motivo per cui — come dimostra la storia — una determinata scienza riprende talvolta la sua ascesa dopo un vuoto di secoli.

Chi vive in questi periodi "vuoti" spesso non se ne accorge, poiché il materiale messo in discussione dai grandi maestri viene frattanto elaborato, ampliato, generalizzato e vagliato. Può ben accadere che delle lacune vengano colmate e per questo sono necessarie scoperte di importanza non inferiore a quelle classiche, benché la loro influenza non sia altrettanto decisiva dal punto di vista del complesso delle scienze. Qui entra in considerazione la questione degli epigoni in generale. Essere epigoni non significa avere un talento inferiore, ma in molti casi solo aver la sfortuna di essere venuti al mondo troppo tardi. Il fatto che non vi sia piú nulla da fare entro un ciclo culturale che per mille cause concomitanti è arrivato a un punto morto, non si deve ascrivere in molti casi a colpa o incapacità, bensí al destino dei singoli.

Ma su questioni cosí complicate e oscure, le quali d'altra parte presuppongono un'analisi di morfologia storica sull'esistenza o meno della gioventú, maturità e vecchiaia di una civiltà, riesce difficile dire qualche cosa di universalmente valido, a meno di non usare

violenza alle realtà della storia. E qui torna opportuna l'altra domanda, se questi successivi stati di sviluppo siano legati a determinati popoli o a determinati cicli culturali. Ma che cosa sono i cicli culturali se si prescinde dai popoli concreti? Su questo complesso di problemi si è discusso molto, e non solo da parte di Spengler, ma noi non possiamo perderci in un campo così vasto senza compromettere il nostro compito principale. Non possiamo però neanche tacere il fenomeno dell'improvvisa decadenza della matematica, verificatosi proprio nel periodo al quale siamo arrivati, successivo ad Apollonio, poiché non vi è dubbio che una nuova importante epoca della matematica si ha solo con Diofanto.

Volendo precisare, si deve dire che la matematica dal secondo secolo avanti Cristo al terzo secolo dopo Cristo, con una sola eccezione, non fece altro che amministrare l'eredità classica, e a questo compito si dedicarono quasi esclusivamente i greci. La matematica romana non entrava in considerazione. I romani erano un popolo di giuristi militanti i quali, apprezzando mediocremente l'erudizione, si procuravano in tutto il mondo soggetto al loro impero i competenti nei campi a loro estranei, quando ne avevano bisogno per gli scopi della tecnica, dell'architettura o della guerra. Il grande periodo dell'egemonia romana dalla fine delle guerre puniche alla fine dell'epoca imperiale è uno dei più sterili dal punto di vista della matematica. Abbiamo accennato a un'unica eccezione, consistente nello sviluppo della trigonometria, e ne avremo da parlare ancora più tardi.

Saliamo perciò ancora una volta sul nostro tappeto magico e rifacciamoci ad Apollonio e alle sue sezioni coniche. È chiaro che lo studio delle curve, iniziato da Archimede e proseguito da Apollonio, rappresentava uno sprone per l'ulteriore studio di tutte le linee curve che obbedissero a una legge di qualche genere.

Così il geometra Nicomede scoprí nel secondo secolo avanti Cristo la concoide, la cui rappresentazione meccanica venne pure data dallo stesso Nicomede mediante uno speciale compasso. Trattandosi di una curva di grado superiore al secondo, la cui equazione si scrive oggi $(x^2 + y^2)\ (x - a)^2 = b^2x^2$, poteva venire utilizzata per la soluzione del problema della trisezione dell'angolo e del problema delico. Lo stesso dicasi della cissoide di Diocle, che ha per equazione $(x^2 + y^2).\ x - ay^2 = 0$. Anche la cissoide può essere disegnata con un compasso adatto. Se aggiungiamo che intorno a questo tempo il geometra Perseo si occupava delle cosiddette "linee spiriche", ossia linee ottenute come sezioni piane di un toro, avremo accennato a tutti i progressi nella conoscenza delle curve raggiunti dopo Archimede e Apollonio.

Come figura importante della matematica post-classica sarebbe ancora da citare Erone di Alessandria. Erone era principalmente un uomo pratico, era un fisico e un agrimensore, e fece progredire notevolmente la geometria applicata. A lui risale la celebre formula che dà l'area del triangolo, ricavata dalla lunghezza dei tre lati.

La già citata trigonometria, sviluppatasi insieme alla geometria sferica sotto l'influenza di primitive cognizioni dei babilonesi e dei caldei, ebbe in Ipparco, seguace di Aristarco da Samo, il suo primo grande trattatista. Ipparco inventò tra l'altro la proiezione stereografica, rappresentando la sfera celeste sul piano dell'equatore, e conservando così tutti gli angoli e i circoli.

La geometria sferica fu sviluppata ulteriormente da Menelao di Alessandria nel primo secolo dopo Cristo, finché trovò il suo maggior rappresentante in Claudio Tolomeo intorno al 140. Sembra forse un'ingiustizia non considerare come una pietra miliare della matematica i perfetti risultati raggiunti da Tolomeo nel campo

della geometria sferica e della trigonometria. L'opera piú importante di questo grande matematico e astronomo, la cui cosmologia imperò ancora per un millennio e mezzo, la *Megale syntaxis* (grande raccolta) o in arabo *Almagesto*, venne tenuta in cosí grande considerazione che la consegna di un esemplare di essa rappresentava uno degli articoli principali di un trattato di pace tra il Califfato e Bisanzio. Noi stessi adoperiamo quotidianamente espressioni che furono coniate per la prima volta da Tolomeo. Egli chiama per esempio le suddivisioni del cerchio e degli angoli "*partes minutae primae*" e "*partes minutae secundae*" (*), da cui è sorta illogicamente la nostra divisione comune in "minuti" e "secondi" che invece si dovrebbero sempre chiamare, come nel linguaggio scientifico, "primi" e "secondi".

Se dunque, malgrado tutto, non ci siamo decisi a trattare la trigonometria come un capitolo a sé, è che la trigonometria rappresenta una parte limitata della geometria metrica e perciò non appartiene in massima alla matematica pura, ma a quella applicata. La sua grande importanza pratica è incontestabile e incontestata, come pure il fatto che le sue premesse, in quanto riguardano le funzioni angolari, appartengono, come il teorema di Pitagora, ai primi fondamenti della matematica superiore. Ma, contrariamente a molte altre discipline matematiche, essa venne creata per scopi esclusivamente pratici e non ha perciò influito di per sé in modo decisivo sul pensiero matematico. Inoltre ha percorso tutto il suo cammino, sia nelle pratiche applicazioni, sia come scienza ausiliaria dell'astronomia, raggiungendo relativamente presto una perfezione definitiva oramai non piú superabile.

Non è da stupirsi che il crescente orientamento pratico della matematica post-classica ponesse sempre piú in primo piano il calcolo numerico effettivo. La me-

(*) Cioè all'incirca "parti ridotte di prima e seconda specie".

nomazione che pesava sull'aritmetica venne lentamente e insensibilmente eliminata, e già Erone si addentra in un tale viluppo di calcoli da far sí che il suo libro venisse piú tardi trasformato in libro di aritmetica e raccolta di esercizi. La necessità di un calcolo effettivo si presenta ancor piú chiaramente in Tolomeo. Una trigonometria di uso pratico senza una trattazione numerica completa è inconcepibile, e per questo Tolomeo compilò anche una grande opera fondamentale, la sua *Tavola delle corde*, di mezzo grado in mezzo grado fino a 90°, che doveva servire allo stesso scopo delle odierne tavole trigonometriche logaritmiche. Tolomeo conosceva inoltre un valore approssimato di π, sotto la forma $3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = 3\frac{17}{120} = 3{,}141666.....$, il quale, come si vede, differisce dal valore esatto 3,1415926... solo dalla quarta cifra decimale in poi, ed è sufficiente per tutti gli usi pratici non troppo rigorosi.

Questa rinnovata attività aritmetica fu proseguita dai cosiddetti neo-pitagorici, i quali ebbero durante il secondo secolo dopo Cristo in Nicomano di Gerasa quello che fu chiamato piú tardi lo "scrittore elementare della matematica". Alla stessa scuola apparteneva anche Teone di Smirne (secondo secolo d. C.) che dette pure impulso all'aritmetica e conosceva alcune formule, dalle quali siamo costretti a ritenere che fosse già a conoscenza dello sviluppo in frazioni continue per le estrazioni di radice.

Benché tutti questi segni sembrassero già annunziare l'alba di nuove scoperte, il corso della storia decise altrimenti da quello che si poteva prevedere. Certo, la figura di Diofanto fu rappresentativa, ma rimase isolata e la successiva fioritura scomparve per molti secoli, anzi per piú di un millennio, dalla scena del mondo.

Prima però di avventurarci nell'opera di Diofanto

e in tutto quello che ne conseguí o avrebbe potuto conseguirne, dobbiamo approfondire la natura dell'aritmetica e dell'algebra, a cui la scrittura dei numeri è strettamente connessa. Poiché la forma di espressione di un numero è la prima cosa che ci viene incontro, cominceremo da questa. Spiegheremo solo il sistema greco, dato che tutti gli altri popoli antichi impiegarono in massima parte sistemi peggiori di quello degli elleni. Fino al tempo di Diofanto, che a noi ora interessa, non ne esisteva uno migliore presso nessun popolo dell'antichità.

In Grecia si sviluppò dunque, a partire dal quinto secolo circa avanti Cristo, una scrittura che adoperava per indicare i numeri le lettere dell'alfabeto con l'aggiunta di segni ausiliari presi a prestito da alfabeti di altre lingue. E cioè si indicava 1 con α', 2 con β', 3 con γ', 4 con δ', 5 con ε', 6 con $\digamma'$ (il "vav" semitico), 7 con ζ', 8 con η', 9 con θ', 10 con ι', 20 con $\varkappa'$, 30 con λ', ecc. Come si vede, alle lettere adoperate come numeri veniva aggiunto un apice in alto a destra per distinguerle dalle lettere ordinarie. I numeri di piú cifre nel senso nostro venivano formati mediante addizione, mantenendo la successione di grandezza e allineando i numeri da sinistra a destra, come nella nostra scrittura, in ordine decrescente. Si tralasciava allora l'apice e si poneva una riga orizzontale sopra il numero. Per esempio, poiché trecento s'indicava con τ', il numero 345 si doveva scrivere $\overline{\tau\mu\varepsilon}$. Dello zero si poteva fare a meno in un sistema cosí costruito, poiché i numeri con posizioni nulle avevano già lettere proprie. Per le migliaia si adoperavano i numeri dall'1 al 9 e si contrassegnavano con un apice in basso a sinistra. Perciò $7000 = {}_{,}\zeta$ oppure $9000 = {}_{,}\theta$. Si potevano anche rappresentare le miriadi o diecine di migliaia, ma non vogliamo perderci in altri particolari.

Vogliamo piuttosto trarre qualche conclusione generale da questo modo di scrivere i numeri. Anzitutto il

sistema greco, malgrado i suoi innegabili vantaggi rispetto ad altri sistemi, come per esempio il romano, non era ancora cosí progredito da dare la possibilità di eseguire i calcoli con scioltezza; specialmente la moltiplicazione e la divisione (per tacere affatto delle estrazioni di radice) richiedevano un lavoro faticoso. Ma quel che piú contava era un secondo inconveniente: a un popolo che scriveva i numeri concreti sotto forma di lettere, difficilmente poteva venire in mente di indicare anche i numeri generici con delle lettere. Questo svantaggio, o meglio questa fatalità storica, fu esiziale per la matematica greca. E a chiunque ne consideri lo sviluppo deve essersi presentata la domanda, che cosa poteva diventare quella geometria se avesse avuto l'appoggio di un'algebra adeguata.

Quest'ultimo accenno va chiarito meglio. Abbiamo avuto occasione già piú di una volta di parlare di importanti lavori algebrici degli antichi greci. Perché dunque deplorare l'assenza di un'algebra? Si tratta solo di una questione di forma, del genere dell'espressione, oppure vi sono differenze piú profonde? Questa seconda ipotesi è quella vera. Non abbiamo detto in nessun posto che i greci usassero il calcolo letterale, ma abbiamo sempre parlato della loro "algebra geometrica". Noi chiamiamo brevemente "algebra" ogni calcolo con numeri generici, e secondo Nesselmann, al quale ci riferiamo, vi sono tre gradi nello sviluppo di quest'algebra. Nel primo grado, l' "algebra in parole" si serve di forme di espressione prese esclusivamente dalla lingua. Questa possibilità era ben nota ai greci fino dai tempi di Pitagora. In questo stadio bisogna esprimere in parole tutto ciò che noi esprimiamo con formule, come per esempio "l'area di un triangolo è uguale alla base moltiplicata per metà dell'altezza, oppure la metà della base per l'altezza o anche il prodotto della base per l'altezza diviso per due". Oppure "la circonferenza è uguale al diametro moltiplicato per un numero com-

preso fra $3\frac{10}{70}$ e $3\frac{10}{71}$" e cosí via. In questo modo si possono anche enunciare e risolvere equazioni. Sia dato per esempio il problema di cercare il numero che si deve aggiungere a 15 per ottenere il quadrato di 6. Noi scriviamo $15 + x = 36$ e diciamo che x è uguale a $36 - 15$, cioè 21. Abbiamo scelto di proposito esempi assai semplici, sappiamo però da quanto è stato detto finora che i greci non si peritavano di esprimere in parole problemi assai complessi, come quello "dei buoi" posto da Archimede. In aiuto di quest'algebra a parole serviva la costruzione geometrica, l'"applicazione", l'intersezione di curve, e simili. Questo metodo ha un solo grande vantaggio: con la geometria si possono senz'altro ottenere le soluzioni irrazionali delle equazioni sotto forma di segmenti ben definiti, ciò che non si è in grado di fare aritmeticamente. Per contro, indipendentemente dalla grande e spesso insuperabile difficoltà di risoluzione geometrica delle equazioni, richiedente un intuito tutto speciale, sta il secondo svantaggio che una estensione del sistema numerale mediante l'aggiunta di grandezze negative o immaginarie non si sarebbe mai potuta avere e neanche discutere con soluzioni di questo genere. Inoltre, semplici motivi dimensionali impedivano l'uso dell'algebra geometrica in equazioni di grado superiore al secondo, se non s'introducevano tratti di coniche, o curve di grado ancor piú elevato, come la concoide e la cissoide. Ma anche qui si arrivava presto a un limite difficilmente superabile.

Malgrado tutto è assai strano che il secondo stadio dell'algebra, come ci appare già nella "cubatura dei mucchi" degli antichi egiziani e come era certamente noto agli elleni, non abbia dato luogo a uno sviluppo ulteriore in terreno alessandrino. Possedevano pure gli egiziani fin dai tempi di Ahmes certi geroglifici per indicare l'"incognita", la grandezza cercata, e per al-

cuni segni di operazione, come l'addizione e la sottrazione. L'addizione, per esempio, veniva indicata con dei piedi rivolti nel senso della scrittura, la sottrazione con gli stessi piedi rivolti in senso opposto.

Il sistema di conservare negli enunciati algebrici, come formule o equazioni, la massima parte della struttura della frase, cioè la veste fraseologica, sostituendo però con abbreviazioni una serie di grandezze, concetti e ordini operativi spesso ricorrenti, si chiama "algebra sincopata". L'innovazione di Diofanto, che ora siamo in grado di comprendere meglio, appare isolata in tutta l'antichità: è l'esempio classico di un'algebra sincopata; e anche nell'opera di Diofanto si vede la lotta per stabilire la nuova forma, lotta che si rivela in una certa indecisione di scrittura. Egli non si rende conto, o così almeno sembra, della portata della sua innovazione, e crede probabilmente che il suo modo di scrivere serve solo a risparmiare lavoro e a facilitare la visione generale dei problemi. Che con questo egli fosse entrato in possesso, per metà inconsciamente, di una macchina mentale automatica di estrema precisione ed efficacia, deve averlo pure avvertito in modo oscuro, senza però rendersene conto con assoluta chiarezza. Parleremo ancora nel corso di questo capitolo di tutte le questioni fondamentali che riguardano l'algebra, dopo aver esaminato da vicino le novità introdotte da Diofanto.

L'oggetto principale delle sue ricerche è, come si addice a un cultore dell'algebra, lo studio e la risoluzione delle equazioni. Dato che in ogni equazione la grandezza da cercare (che oggi chiamiamo x), cioè l'incognita, ha la parte principale, Diofanto si procura anzitutto un simbolo abbreviato per questa incognita, e chiama impropriamente la prima potenza dell'incognita "il numero" (*arithmos*), scrivendola col sigma finale, al quale aggiunge un apice in alto a destra. L'incognita appare perciò sotto la forma ς'. Quando

vuole indicare il plurale scrive ξς. Sul perché abbia scelto proprio questa lettera si hanno opinioni diverse. Alcuni affermano che dovette prenderla perché tutte le altre lettere dell'alfabeto greco erano già impegnate per indicare numeri. Altri la ritengono una contrazione di α e ρ, cioè delle due lettere iniziali della parola *arithmos*. Sicuramente Diofanto per designare le potenze superiori non ha trovato nessun'altra lettera che non fosse già usata per i numeri concreti. Si aiuta perciò adoperando le iniziali delle parole che indicano queste potenze e aggiungendo in alto una seconda lettera piú piccola, che in tutti i casi è la υ̃. Scrive perciò x^2 come δ^{υ} (*dynamis* = quadrato), x^3 come κ^{υ} (*kybos* = = cubo), x^4 come $\delta\delta^{\upsilon}$ (*dynamodynamis* = quadrato del quadrato), x^5 come $\delta\kappa^{\upsilon}$ (*dynamokybos* = quadrato moltiplicato cubo) e infine x^6 come $\kappa\kappa^{\upsilon}$ (*kybokybos* = cubo moltiplicato cubo). Non va piú avanti di cosí. Viceversa le frazioni che hanno al denominatore una potenza dell'incognita vengono contrassegnate con una notazione speciale che si collega ai segni già indicati. Come segno di frazione (o, come diremmo oggi, di potenza negativa) viene aggiunta al piccolo υ̃ una legatura somigliante alla lettera greca χ, in modo da scrivere $\frac{1}{x^2}$ (*dynamoston*) come $\delta^{\upsilon}\chi$, $\frac{1}{x^3}$ (*kyboston*) come $\kappa^{\upsilon}\chi$, $\frac{1}{x^4}$ (*dynamodynamoston*) come $\delta\delta^{\upsilon}\chi$, e via di seguito. Il reciproco della prima potenza dell'incognita, $\frac{1}{x}$, si chiama *arithmoston*. Dopo queste potenze dell'incognita o del suo reciproco viene scritto il coefficiente, cosicché p. e. $15x$ si rappresenta con $\xi\overline{\imath\varepsilon}$. Poiché però nelle equazioni appaiono anche le cosiddette costanti (numeri non qualificati), queste, per evitare confusione, devono essere contrassegnate come tali, tanto piú che manca un segno di addizione e ogni somma

si esprime scrivendo semplicemente gli addendi uno vicino all'altro. Questo contrassegno è il μ con un o applicato in alto, cioè $\mu\bar{o}$, il che sta a significare *monas* ossia "unità". Dovendosi rappresentare per esempio $23x^2 + 14$ si doveva perciò scrivere $\delta\bar{\upsilon}\overline{\gamma\kappa\mu}\bar{o}\iota\delta$. Ma qui non si esaurisce ancora il simbolismo di Diofanto. Egli usa anche un segno di sottrazione sotto forma di ψ rovesciato, $\pitchfork$, che è apparentemente una legatura (abbreviazione con contrazione) della parola *leipsis*, indicante per Diofanto "sottrazione", all'opposto di *kyparxsis*, significante "addizione". Infine troviamo in alcuni casi invece delle parole "è uguale" (*isoi eisin*) semplicemente la lettera ι. Questa limitazione "in alcuni casi" è della massima importanza, e la spiegheremo su alcuni esempi pratici della scrittura di Diofanto, resa nota da Nesselmann. Ecco, per esempio, come si presenterebbe una equazione:

ϛϛοὶ ἄρα ῑ μο̄λ ἴσοι εἰσιν ϛϛοῖς ῑα μονάσι ῑε.

Questa espressione significa letteralmente: « 10 incognite piú 30 unità sono uguali a 11 incognite più 15 unità », cioè nella nostra scrittura $10x + 30 = 11x + 15$. Facciamo notare che alle "incognite" dell'equazione vengono applicate le desinenze *oi* ed *ois*, corrispondenti al nominativo e al dativo plurale della declinazione maschile. Inoltre Diofanto nell'esempio citato scrive *monas* la prima volta abbreviato al nominativo, e viceversa per esteso al dativo. Infine non troviamo in questo caso il segno di uguaglianza, ma le parole *isoi eisin* "sono uguali". Di qui si vede chiaramente che il pensiero di Diofanto era ancora tutto preso nella antica algebra in parole, e che i suoi simboli rappresentavano per lui soprattutto delle abbreviazioni, come si usava anche fuori della matematica nella scrittura delle parole piú comuni o delle desinenze. Un'altra espressione originale, una frazione di due polinomi, viene trattata ponendo al posto della

nostra linea di frazione la parola *moriou* (*), che con tutta la frase a destra di questa rappresenta il denominatore. L'espressione appare cosí:

δῦζ λείψέ $\overline{\text{κδ}}$ κορίου δῦᾱμο̱ $\overline{\text{ιβ}}$ λεῖψει $\overline{\text{ςςζ}}$

il che nella nostra scrittura algebrica equivarrebbe a $\frac{7x^2 - 24x}{x^2 + 12 - 7x}$. Anche qui notiamo la mancanza di applicazione rigorosa dei simboli. Al posto del solito segno "meno" (ϕ) si ha due volte la parola completa λείψει e ad x^2 viene aggiunta esplicitamente la unità *a*. Daremo ora un esempio, da noi costruito, della scrittura di Diofanto, tale da utilizzare tutte le abbreviazioni usate da Diofanto stesso, e cioè l'equazione $\frac{x^5 + 3x - 10}{5x - 2} = 24x^6 + 18$ la quale si presenterebbe in questo modo:

δκῦ ς'γϕμο̱ῑ μορίου ς'εϕμο̱β ι κκῦ$\overline{\text{κε}}$ μο̱ $\overline{\text{ιη}}$.

In questo esempio, benché si tratti di un'espressione assai complicata, non vi è alcuna parola ad eccezione di quella che indica la divisione *moriou*, che del resto si sarebbe potuta facilmente rappresentare con una μ rovesciata. Con un po' di metodo si sarebbe avuto già con Diofanto un sistema di scrittura algebrica altamente perfezionato, di poco inferiore al nostro come semplicità, se si escludono i numeri concreti, per i quali naturalmente non si conosceva ancora il sistema dei valori di posizione.

Ma non vogliamo entrare in sottigliezze filologiche né censurare il grande Diofanto, vogliamo solo chiarire fino in fondo una questione di enorme portata, cioè quella dell'importanza dell'algebra in generale e della scrittura algebrica in particolare. Non è infatti uno scherzo, ma un fatto storico, che l'"algebra geometrica" degli antichi greci dovette essere decifrata

(*) Altrove si trova in Diofanto anche *en morio*.

piú tardi come i geroglifici, mentre Diofanto e gli ancor piú ardui matematici arabi potevano essere compresi nelle cose essenziali già all'inizio dell'êra moderna.

Si deve perciò porre anzitutto il problema dell'importanza dell'algebra, che presuppone il problema dell'importanza della aritmetica nel pensiero matematico, poiché quella fu generata da questa. In linguaggio filosofico, alla base di questo problema c'è la differenza tra quello che può essere concepito e quello che può essere intuito. Adottando le espressioni di Kant, l'intelletto è la facoltà di formare concetti, mentre l'intuizione ci dà la rappresentazione sensibile. L'intelletto è una cosiddetta facoltà discorsiva; e questo non significa altro se non che, per ottenere i suoi risultati, ha bisogno della successione, mentre l'intuizione è indipendente dal tempo e si ottiene con un solo sguardo. Per conseguenza il campo proprio di attività dell'intelletto è l'analisi, la divisione, mentre l'intuizione è una facoltà sintetica e associativa. Abbiamo già parlato di questi argomenti a proposito dei paradossi di Zenone. Una continuità reale si può ottenere solo con l'intuizione: una linea, una superficie, un volume sono intuitivamente enti continui. Se io però voglio costruire questi enti con l'intelletto, devo rifarmi agli elementi primitivi, alle pietre elementari, cioè agli atomi. Ma gli atomi sono aggregati in qualche modo numerabili, anche se affermo che il loro numero è infinito.

Non possiamo però perderci ulteriormente in queste dissertazioni filosofiche, poiché commetteremmo un anacronismo. Siamo infatti a Diofanto e non alla critica moderna o alla teoria degli aggregati. Volevamo solo chiarire che il numero e la quantità sono prodotti dell'attività intellettiva e che è del pari un'attività intellettiva quella di unire questi numeri tra loro in mille modi. L'attività intuitiva concerne viceversa la forma e la figura, cioè tutto quello che noi chiamiamo pro-

priamente geometrico. Ora è ovvio che intelletto e intuizione non si presentano mai puri e isolati, poiché, citando Kant, i concetti senza intuizione sono vuoti e le intuizioni senza concetti sono cieche. Nel concetto, in sé non rappresentabile, dell'infinito è contenuta in qualche parte una sia pur nebulosa intuizione e nell'intuizione di un triangolo vi è l'elemento concettuale di un certo numero di angoli e di un certo modo di congiungere questi angoli mediante linee.

Del pari il concettuale e l'intuitivo possono naturalmente mescolarsi nei rapporti piú diversi in un qualsiasi problema matematico. E vi è proprio questo di caratteristico, che l'apparente cecità delle intuizioni e l'apparente vacuità dei concetti sono proprio adatte a mettere in moto le forze della matematica. Abbiamo infatti la possibilità di ridurre gli oggetti geometrici a semplici schemi e, dall'altro lato, di simbolizzare i numeri fino al punto che non ne rimanga piú nulla all'infuori del concetto piú generale possibile di numero. Proprio questa è la sostanza dell'algebra, la quale non deve piú operare con numeri concreti, ma con numeri generici o anche, si potrebbe dire, con i loro sostituti. Si cerca un certo numero cosí e cosí o un numero al quadrato cosí e cosí. Noi non lo conosciamo, altrimenti non avremmo bisogno di cercarlo; prima però di arrivare a conoscerne il valore gli diamo già un nome e ce ne serviamo nei calcoli secondo regole valide per i numeri effettivi. Si somma, si sottrae, si moltiplica, si divide con questi numeri ancora sconosciuti, si elevano al quadrato, alla ennesima potenza, se ne estrae la radice; in breve, si opera con numeri generici come se fossero quantità concrete.

Tutto questo potrebbe indubbiamente svolgersi anche nella mente: è un'attività concettuale e logica, ma non è necessario che sia accompagnata da una scrittura propria che serva esclusivamente ad essa. Cosí era dell'attività dei greci fino a Diofanto. Si pensava

algebricamente, si parlava algebricamente, ma non si scriveva ancora l'algebra, oppure si scriveva nella lingua corrente. E anche lo stesso Diofanto, come abbiamo visto, cominciò a scrivere l'algebra in una forma intermedia tra l'abbreviazione e il simbolo indipendente. Come si scrive dunque l'algebra e perché si scrive? Rispondiamo che l'algebra si scrive con simboli e ordini operativi, e che si scrive cosí non solo come stenografia, ma per motivi assai piú profondi. Non è certo da disprezzare il vantaggio di poter scrivere semplicemente $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ invece di dire che il quadrato di un'espressione di due membri si compone del quadrato del primo, del quadrato del secondo e del doppio prodotto dei due membri. Si guadagna tempo e si ha una visione sintetica di tutta l'equazione. Possiamo ora con la stessa regola elevare nuovamente a quadrato l'espressione ottenuta, scrivendo $[(a^2 + b^2) + 2ab]^2$, e otteniamo cosí come risultato prima $(a^2 + b^2)^2 + (2ab)^2 + 2 \cdot 2ab\,(a^2 + b^2)$ da cui si ha facilmente $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 + + 4a^3b + 4ab^3$ e infine, sommando i termini della stessa forma, si ha come risultato $a^4 + b^4 + 6a^2b^2 + + 4a^3b + 4ab^3$. Un'operazione di questo genere, espressa in parole, sovraccaricherebbe in modo eccessivo la nostra capacità di rappresentazione, mentre con la scrittura simbolica occorre solo un po' di attenzione e di precisione per non cadere in errori materiali. Ma vi è ancora dell'altro. I simboli (cioè i segni che rappresentano numeri generici, come *a* e *b*, oppure il ς′ di Diofanto) e gli ordini o simboli operativi o di collegamento (+, —, = ecc.) acquistano nello stesso tempo una vita propria. Essi si uniscono per formare un "algoritmo", una macchina pensante, e basta adoperarli secondo certe regole assai semplici. La macchina, una volta messa in moto, provvede a tutto il resto senza possibilità di errori, e alla fine si ha il risultato. Ma con Diofanto non siamo an-

cora così avanti, benché la cosa sarebbe stata senz'altro possibile con i mezzi da lui inventati. Il passo principale fatto da Diofanto consiste nell'aver iniziato una forma di scrittura algebrica, una cosiddetta "notazione", ma non un vero algoritmo. Per passare a quest'ultimo vi era ancora da percorrere una lunga via, sviluppatasi principalmente nel campo dei numeri concreti, come vedremo nel capitolo seguente.

Questa affermazione non è in contraddizione col fatto che Diofanto ad un certo punto dà esplicitamente una regola generale per la risoluzione delle equazioni. Egli dice: "Quando in un dato problema si arriva a un'equazione composta delle stesse espressioni generali ma tale che i coefficienti dai due lati sono diversi, si devono sottrarre i termini dello stesso tipo, finché un membro diventa uguale all'altro. Quando però da una parte o da entrambe si trovano grandezze sottrattive, si devono aggiungere queste grandezze dalle due parti, fino ad avere solo grandezze addittive. Si devono allora di nuovo sottrarre i termini dello stesso tipo, finché rimane un solo termine da ciascuna parte". Cantor osserva che la regola di Diofanto riguarda la riduzione di un'equazione alla forma $ax^m = bx^n$, dove m ed n sono numeri interi, diversi tra loro, uno dei quali può essere anche zero. Questa regola, dice Cantor, è così chiara come raramente se ne vedono espresse nell'antichità.

Ci riferiamo qui a Cantor per appoggiare la nostra affermazione che Diofanto non ha costruito un vero algoritmo, una vera macchina pensante universale. In ogni problema risolto da Diofanto ci stupisce il suo incredibile virtuosimo personale nell'affrontarlo e nel dominarlo, però ognuno di questi problemi viene trattato a sé, senza pensare a riunire sotto regole generali le questioni affini. Come disse una volta Descartes a proposito dei matematici greci, Diofanto non ha formulato dei teoremi seguendo un metodo gene-

rale, ma ha raccolto quelli nei quali si è imbattuto.

Osserviamo perciò ancora una volta che per noi Diofanto, malgrado la sua incontestabile genialità dal punto di vista dello sviluppo storico della matematica, non è altro che un precursore della notazione algebrica, anche se applicò alle equazioni, specialmente le indeterminate, un metodo di trattazione completamente nuovo. Esamineremo ora piú da vicino questa sua speciale attività di studioso delle equazioni, che si svolge accanto alla sua opera generica di inventore della prima notazione algebrica.

Anzitutto, però, un'altra osservazione. A Diofanto non interessa di trovare tutte le soluzioni di un'equazione, specie per le equazioni indeterminate, viceversa si accontenta spesso di dare un'unica soluzione. Tanto meno egli si è sforzato di cercare soluzioni esclusivamente intere. Il metodo adatto fu trovato dal suo traduttore Bachet de Méziriac nel secolo decimosettimo. Ocorre far notare questo, perché oggi nella scuola e nella scienza le equazioni indeterminate si chiamano col nome di "equazioni diofantiche" quando ammettono soluzioni intere, e cosí pure si chiama soluzione diofantica una soluzione rappresentata da un numero intero. Diofanto stesso considera in tutta la sua opera soltanto le soluzioni positive e razionali. Da buon greco non riconosce le grandezze irrazionali come numeri, e per quanto riguarda le grandezze negative non gli è di certo mai venuto in mente, come del resto a nessuno degli antichi, di considerarle come numeri o soluzioni di equazioni, dal momento che, geometricamente parlando, non avevano alcun senso, almeno nell'ambito della geometria greca. Non vogliamo però accontentarci di questi semplici accenni, insufficienti a farci vedere l'opera di Diofanto nella sua giusta luce: quest'opera è infatti tutt'altro che limitata, e al contrario è in diversi punti addirittura sorprendente. Bisogna considerare che egli ha da lottare

con una gravissima difficoltà derivante, per dir così, dal materiale grezzo di cui dispone, dalla natura del suo strumento di lavoro. Non avendo disponibili per le sue "incognite", all'infuori della ς', alcun'altra lettera che non significasse già un numero concreto, è costretto a lavorare continuamente con una sola incognita. Si sarebbe potuto aiutare, è vero, con altri alfabeti, ma questo di sicuro gli ripugnava, poiché gli elleni evitavano sempre di usare parole straniere.

La sua opera principale porta il titolo di *Arithmetika* (cioè "questioni aritmetiche" o "studi aritmetici") e consiste, oltre a discussioni generali sui numeri, di esempi che richiedono la risoluzione di equazioni. Così nel 39° esercizio del primo libro si richiede che, dati due numeri, si cerchi un terzo numero, tale che la somma di due qualsiasi di tre questi numeri moltiplicata per il terzo dia tre numeri che differiscano tra loro della stessa quantità. Una condizione per certo assai complicata. Diofanto ragiona così: i numeri dati siano 3 e 5, il numero da trovare x (scritto naturalmente ς'). Si ottengono con ciò i tre prodotti $3(x+5)$, $5(x+3)$ e $x(5+3)$. Il risultato della prima moltiplicazione $(3x+15)$ non può essere il più grande dei tre numeri; viceversa $(5x+15)$ potrebbe essere il più grande o l'intermedio, e $8x$ il più grande, l'intermedio o il più piccolo. Supponendo che $(5x+15)$ sia il più grande e $8x$ l'intermedio dei tre numeri e poiché i tre numeri devono dare due a due la stessa differenza, la somma del numero più grande e del numero più piccolo dev'essere uguale al doppio del numero intermedio; infatti, nel nostro linguaggio algebrico, da $a_1 - d = a_2$ e $a_2 - d = a_3$ si deduce che $a_1 - a_3 = 2a_2$. Perciò $(5x+15)+(3x+15) = 2.8x$ ossia $8x+30+16x$. Supponendo viceversa che $(5x+15)$ sia il numero più grande, $(3x+15)$ il numero intermedio e $8x$ il più piccolo, si ha secondo la regola precedente $(5x+15)+8x = 2(3x+15)$, cioè $13x+15 = 6x+30$.

Se infine $8x$ è il numero piú grande, $(5x+15)$ l'intermedio e $(3x+15)$ il piú piccolo, si ha $8x+(3x+15)=2\,(5x+15)$, ossia $11x+15=10x+30$. Risolvendo ora le tre equazioni, ognuna per conto suo, si ottengono per x i tre valori $\frac{15}{4}$, $\frac{15}{7}$ e 15, che soddisfano tutti e tre alla condizione posta. Da questo esempio si vede chiaramente che Diofanto lavora in sostanza con tre equazioni, mentre in apparenza l'incognita è unica.

Per mostrare ancora con quale virtuosismo Diofanto tratti equazioni indeterminate assai difficili per i suoi tempi, diamo qui appresso, nella rappresentazione di Zeuthen, equazioni della forma $y^2=a^2x^2+bx+c$ e $y^2=ax^2+bx+c^2$, che s'incontrano di frequente in Diofanto. Questi risolve la prima forma ponendo $y=ax+z$, mentre la seconda forma viene trattata con la sostituzione $y=zx+c$. Ottiene perciò nel primo caso l'equazione $(ax+z)^2=a^2x^2+bx+c$, ossia $a^2x^2+2axz+z^2=a^2x^2+bx+c$, cioè $2axz+z^2=bx+c$ che diventa $2axz-bx=c-z^2$ e $x\,(2az-b)=c-z^2$ da cui $x=\frac{c-z^2}{2az-b}$. Ora x si può facilmente esprimere mediante z sotto forma razionale, e del pari y mediante z e x. Supponiamo che l'equazione di partenza fosse $y^2=16x+3x+10$ e di aver sostituito al posto di $y=ax+z$, secondo la regola precedente, $4x+z$. Dopo effettuata la sostituzione si avrebbe $(4x+z)^2=16x^2+3x+10$, cioè $16x^2+8xz+z^2=16x^2+3x+10$, da cui $8xz+z^2=3x+10$ e da questa si otterrebbe $x=\frac{10-z^2}{8z-3}$. Se ora scegliamo una z tale che la soluzione non diventi negativa, cioè per esempio, $z=2$, otteniamo per x il valore $\frac{10-4}{16-3}$, ossia $x=\frac{6}{13}$. La y corrispondente risulta, essendo per ipotesi uguale a $(4x+z)$, pari a $\left(\frac{24}{13}+2\right)$, ossia

$\frac{24+26}{13}=\frac{50}{13}$. Ritornando alla equazione di origine, dev'essere $\left(\frac{50}{13}\right)^2$ uguale a 16. $\left(\frac{6}{13}\right)^2+3\cdot\frac{6}{13}+10$, cioè $\frac{2500}{169}=\frac{576}{169}+\frac{234}{169}+\frac{1690}{169}$ il che evidentemente torna. In guisa analoga viene sfruttata la seconda sostituzione, per ottenere da equazioni del tipo indicato radici o soluzioni razionali per entrambe le incognite. Zeuthen osserva che ancor oggi si usano le stesse sostituzioni per rendere razionali i differenziali irrazionali. Naturalmente lo svolgimento effettivo di problemi del genere in Diofanto appare assai piú complicato, poiché egli opera con una sola incognita e perciò è costretto a inserire di continuo equazioni intermedie. Inoltre quel che confonde il lettore è il fatto che l'incognita appare in parecchie equazioni diverse, sempre sotto forma di ς', benché vi abbia un diverso significato, o rispettivamente $\delta\bar{\upsilon}$ quando si tratta di un quadrato. Tanto piú stupefacente è la sicurezza con cui la materia viene trattata. Abbiamo visto anche nel nostro primo esempio come sia possibile un tale procedimento; infatti la x indicava in ognuna delle tre equazioni un valore diverso. Naturalmente lo stesso procedimento applicato a una medesima equazione indeterminata è ancor meno maneggevole e intelligibile.

Per dimostrare l'abilità di Diofanto, e i suoi "artifizi", citiamo un'altra equazione indeterminata. Due numeri, che noi chiamiamo y e z, dànno come somma 20. Ognuno di questi due numeri, aumentato dello stesso numero al quadrato, deve dare di nuovo un quadrato. In scrittura moderna: $y+z=20$, $y+x^2=u^2$, $z+x^2=v^2$, ossia tre equazioni con quattro incognite. Come si trae d'impiccio il nostro maestro? Ancora mediante abili sostituzioni, come vedremo subito. Eleva al quadrato $(u+\varsigma)$ e $(v+\varsigma)$ e ottiene $u^2+2u\varsigma+\varsigma^2$ e

$v^2+2v\varsigma+\varsigma^2$. Queste espressioni, pensa Diofanto, possono benissimo venire sostituite al posto della seconda e terza equazione di cui sopra. Sarebbe allora $(u^2+2u\varsigma)+\varsigma^2=u^2$ e $(v^2+2v\varsigma)+\varsigma^2=v^2$. Abbiamo perciò adesso $(u^2+2u\varsigma)$ al posto di y e $(v^2+2v\varsigma)$ al posto di z. Ma poiché $y+z=20$, è anche $u^2+2u\varsigma+v^2+2v\varsigma=20$. Per ottenere ora da questa equazione un valore positivo di ς, u^2+v^2 dev'essere minore di 20. Supponiamo, come fa Diofanto, che u^2 sia 4 e v^2 sia 9. Allora $4\varsigma+6\varsigma=20-13=7$ e finalmente $\varsigma=\frac{7}{10}$. Ne consegue $y=\frac{68}{10}$ e $z=\frac{132}{10}$, valori coi quali sono soddisfatte tutte le condizioni del sistema di equazioni proposto. Infatti $\frac{68}{10}+\left(\frac{7}{10}\right)^2=\frac{729}{100}$ cioè il numero razionale frazionario $\left(\frac{27}{10}\right)^2$ e $\frac{132}{10}+\left(\frac{7}{10}\right)^2=\frac{1369}{100}$, cioè $\left(\frac{37}{10}\right)^2$. Queste soluzioni, come dappertutto in Diofanto, sono naturalmente soluzioni speciali, ottenute introducendo tempestivamente dei valori concreti ed escludendo i valori negativi di ς. Oggi noi sostituiremmo tranquillamente per u e v anche numeri che non soddisfano alla condizione $u^2+v^2<20$ (la quale, sia detto di sfuggita, è piuttosto arbitraria). Per $u=3$ e $v=4$ si otterrebbe ad esempio per ς il valore $-\frac{5}{14}$, per y il valore $\frac{96}{14}$ e per z il valore $\frac{184}{14}$. Ne consegue che $u^2=\left(\frac{37}{14}\right)^2$ e $v^2=\left(\frac{51}{14}\right)^2$, cioè il sistema di equazioni è anche in questo caso soddisfatto.

Citiamo infine l'unico esempio di equazione cubica che si trovi in Diofanto. Nella nostra scrittura l'equazione si presenterebbe come $(x-1)^3=(x+1)^2+2$. Sviluppata darebbe $x^3-3x^2+3x-1=x^2+2x+1+2$, oppure, ordinata secondo l'abitudine di Diofanto, $x^3+x=$

$=4x^2+4$. Egli infatti dispone sempre le equazioni in modo da avere soltanto termini positivi. Nel caso attuale può trasformare ancora l'equazione in $x(x^2+1)=$ $=4\ (x^2+1)$ e, dividendo, ottiene $x=4$. Delle altre due radici, che ogni equazione cubica deve avere e che nel nostro caso sarebbero immaginarie, non si fa naturalmente parola.

Non fu però soltanto l'abilità, diciamo così, avventurosa di Diofanto nel trattare le equazioni, a spiegare l'influenza che egli ebbe in un'epoca posteriore. I travestimenti delle equazioni da lui adottati gli offrono l'occasione di imbattersi spesso in relazioni teoriche tra i numeri. Così trova che in ogni triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa rimane ancora un quadrato quando vi si aggiunge o si sottrae il doppio prodotto dei cateti. In altri termini $a^2+b^2\pm 2ab$ è sempre un quadrato, il che algebricamente è per noi chiarissimo, poiché non significa altro che lo sviluppo del quadrato dei binomio $(a+b)$ o $(a-b)$. Senza dubbio questo risultato appare qui sotto un altro aspetto, come una nuova relazione tra i lati di un triangolo rettangolo. Diofanto scopre inoltre che il numero 65 si può scomporre nella somma di due quadrati in due modi, cioè $(16+49)$ e $(64+1)$, poiché 65 è il prodotto della moltiplicazione di 5 per 13, i quali a loro volta sono ciascuno la somma di due quadrati, $(4+1)$ e $(9+4)$. Questo risultato viene così tradotto nella nostra algebra: $(a^2+b^2).(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$ o anche $=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$. Diofanto riconosce da ultimo che ogni quadrato si può concepire quale somma di due quadrati in mille modi diversi. Se cioè a^2 è il numero da scomporre, si può porre una parte uguale a x^2 e l'altra parte uguale a $(mx-a)^2$, essendo m scelto a piacere. È allora $a^2=x^2+m^2x^2-2amx+a^2$, da cui $x^2(m^2+1)=2amx$ e $x(m^2+1)=2am$, e infine $x=$ $=\dfrac{2am}{m^2+1}$. Il secondo numero da elevare al quadrato

$(mx-a)$ si ottiene allora sotto la forma $m\left(\frac{2am}{m^2+1}\right) - a$ ossia $a\left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right)$. Con ciò, essendo $a^2=x^2+(mx-a)^2$, questo a^2 da cui siamo partiti è ora $a^2=\left(\frac{2m}{m^2+1}.a\right)^2 + +\left(\frac{m^2+1}{m^2-1}.a\right)^2$ dove m può essere scelto a piacere. Se per esempio avessimo da scomporre $(15)^2=225$, e scegliamo $m=3$, otteniamo $a^2=225=(9)^2+(12)^2=81+ +144=225$. Se scegliamo $m=5$, otteniamo $a^2=225= =\left(\frac{75}{13}\right)^2+\left(\frac{180}{13}\right)^2=\frac{38.025}{169}=225$.

Queste cognizioni sulla teoria dei numeri hanno agito come potente stimolo sui teorici del secolo decimosettimo, specialmente su Fermat.

Non vogliamo però intrattenere piú a lungo il lettore con l'opera di Diofanto. Abbiamo dovuto mostrarla nei suoi aspetti concreti, poiché con la sola critica non si può rappresentare in modo persuasivo la geniale abilità di quest'unico reale algebrista del ciclo culturale ellenico. La sua posizione isolata si spiega con l'epoca di decadenza in cui visse; non ebbe infatti successori, perché la potenza creativa degli elleni era oramai esaurita, e forse ancor piú perché la sua opera aveva abbandonato le rotaie abituali della matematica greca.

In ogni caso Diofanto costituisce un fenomeno singolare nella storia della scienza, e ne rappresenta da solo un punto culminante, avendo adoperato per primo la scrittura simbolica e abbattuto le barriere dell'algebra "in parole" e dell'algebra geometrica.

VI

AL-KHUWARIZMĪ

La matematica come macchina mentale

Il nostro tappeto magico ci dovrà portare ora nel paese donde proviene. Eccoci d'un tratto nel mondo delle *Mille e una notte*, nella città dei grandi califfi al-Mansur, Harun ar-Rashid e al-Ma'mun. La città si chiama Bagdad e la civiltà che essa racchiude, sviluppatasi con rapidità di sogno, è ora, al passaggio dall'ottavo al nono secolo dell'êra cristiana, vecchia appena di un secolo; poiché solo dopo la tempesta delle migrazioni dei popoli la forza di coesione dell'Islam ha potuto foggiare una nazione civile e potente di quei nomadi sconosciuti, che in mezzo al deserto, nelle notti stellate, si raccontavano a vicenda favole meravigliose.

In Occidente tutto è cambiato: Merovingi, Carolingi, Pipino, Carlo Magno. Le porte delle ultime scuole di filosofia, semivuote e da lungo tempo abbandonate dallo spirito, sono state già chiuse definitivamente fino dal sesto secolo dopo Cristo; e le biblioteche alessandrine sono state saccheggiate e incendiate. L'ellenismo decadente vive ancora, rigido come un mosaico dorato, in un impero pieno di perfidia, di crudeltà, di lussuria, e di una cultura malamente appresa: Bisanzio.

Prima della definitiva decadenza della civiltà classica vi furono due matematici che si distinsero nel campo della geometria; non certo tali da far epoca, ma essenzialmente abili e geniali compilatori retrospettivi. Essi furono Pappo e Proclo Diadoco. Una storia della matematica deve occuparsi di entrambi, dato che ad essi

non manca una certa personalità propria. Lo stesso dicasi dell'aritmetico Teone di Alessandria e della sua infelice figlia Ipazia, l'unica donna che meriti un posto nella storia della matematica dagli inizi di questa scienza in poi. L'imperatore Giuliano l'Apostata aveva assicurato alle scuole di filosofia la sua protezione contro il cristianesimo soverchiante, e le classi piú colte non erano ancora completamente convertite. Questo ancora alcuni decenni dopo la morte di Giuliano. Ipazia era pagana, ma però, a motivo dei suoi meriti scientifici, veniva tenuta in grande considerazione dal vescovo Sinesio di Tolemaide ed era ben vista anche dal prefetto imperiale Oreste di Alessandria. Avvenne ora che proprio questo prefetto respingesse le pretese gerarchiche del vescovo Cirillo; si sospettò Ipazia di aver sobillato il prefetto, e una turba di popolo la trucidò. Era la stessa plebe di Alessandria che circa vent'anni prima, sotto veste di fanatismo religioso, e in conformità all'ordine di Teodosio di distruggere tutti i templi dei pagani, aveva ciecamente saccheggiato, incenerito e demolito fino alle fondamenta il tempio di Serapide, ultimo rifugio della biblioteca alessandrina.

La morte di Ipazia e la dispersione dei resti di un'epoca di straordinaria grandezza hanno il valore di un simbolo. Ma proprio a questa svolta del mondo spirituale è da porre il merito imperituro degli arabi. Il nostro tappeto magico ci riporta alla corte dei califfi, dove non soltanto Sheherazade è in onore. La civiltà araba era una civiltà esclusivamente maschile e perciò particolarmente dedita alla matematica. Con lo zelo e col fanatismo dei popoli nuovi essa raccoglie l'eredità dall'antica Grecia sotto forma di manoscritti. A Bagdad però si attribuisce un grande valore non soltanto ai papiri ellenici; anche i testi persiani e sanscriti cominciano a riempire le biblioteche, e un esercito di traduttori si dedica a volgere in arabo Euclide, Ar-

chimede, Menelao, Pappo e specialmente la *Sintassi* di Tolomeo, che da allora in poi fu chiamata, per secoli, *Almagesto*. Il programma di studio nelle scuole — la matematica diventa accessibile a tutti — comincia con Euclide e finisce con l'*Almagesto*. Questa volta però la scienza si riflette nell'anima di un popolo diverso, con facoltà matematiche e logiche assai spiccate, la cui caratteristica principale era l'indirizzo "magico", come lo chiama Spengler. Se gli elleni, nella loro ricerca di armonia, si erano aggirati nel mondo intuitivo esterno, l'anima "magica" tende alla costruzione del mondo del pensiero. Su questo mondo aleggia qualcosa di incredibilmente freddo, ma nello stesso tempo scintillante. Le immagini e i concetti, l'architettonica e la dizione, tutto diventa netto e preciso, come una fotografia presa col diaframma al minimo e stampata a toni contrastanti. E non è in contrasto con tale attitudine spirituale che la fantasia cerchi rifugio nelle favole meravigliose. Poiché anche con la lampada di Aladino si finisce per entrare in giardini, dove agli alberi sono appese pietre preziose sfaccettate. Questa civiltà manca però di plastica e di pittura. L'irrazionale viene bandito dalla vita; per lo meno viene scacciato dal mondo visibile e racchiuso nel mondo interiore, nel regno della fantasia e dell'incantesimo.

Abbiamo pronunciata la parola "incantesimo". L'importanza della magía non deriva infatti soltanto dalla limitazione imposta dal raziocinio alla visione che abbiamo del mondo, o meglio ai nostri pensieri sul mondo, ma anche da un altro oscuro fattore determinante. Dove l'intuizione comincia a dissolversi, dietro la forma esteriore non vi è che il caos. Dove viceversa il raziocinio si perde nell'ombra, là si appiatta la demenza, l'orrore, l'incantesimo. Quell'incantesimo il quale null'altro è se non il tentativo per metà vano di estendere il regno dell'intelletto, oltre i suoi propri confini, nell'inesplorato.

La matematica ha sempre dato impulso a quest'attività magico-cabalistica. Chiunque s'immerga profondamente nello studio di essa, rimane sorpreso e spaventato allo stesso tempo dall'aiuto singolare che ne è arrecato alla conoscenza. Poiché solo la matematica è la "vera cabbala", come l'ha chiamata Leibniz un millennio piú tardi. I suoi risultati sorgono spesso inattesi dal piú profondo della mente umana, cosicché lo stesso grande Platone non seppe indicare questo processo altro che con la parola *anamnesis*, reminiscenza. Perciò insegnare la matematica non significava per lui altro che riesumare un patrimonio mentale innato. Ma non ha del magico soltanto questo balzar fuori di relazioni mediante la lunga speculazione passiva nota a ogni geometra, questo lavorío per cui interi gruppi di figure cominciano a muoversi, a sovrapporsi, a ordinarsi, per rivelare infine qualche cosa di completamente inatteso; altrettanto cabalistica è la via che l'istrumento dell'aritmetica e dell'algebra apre all'improvviso in se stesso, dimostrandosi un vero "apprendista stregone". E questa via ci conduce spesso su degli abissi dove il pensiero non penetra mai, abissi di cui non si può neanche scorgere il fondo. L'arte cabalistica piú elevata è però l'algoritmo derivato da un'appropriata notazione, la macchina pensante dell'aritmetica e dell'algebra con tutta la magía dei suoi simboli.

Fino al secolo decimonono non si sapeva donde venisse la parola "algoritmo", benché già dal tempo di Leibniz fosse di uso generale. Si pensava a una storpiatura del termine "logaritmo", e si credeva per certo che avesse relazione con *arithmos* (numero). Furono gli orientalisti a spiegare l'indovinello e a dissipare anche la falsa credenza che Algoritmi fosse un favoloso re indiano esperto di magía. Egli fu viceversa un uomo in carne e ossa, un grande matematico del tempo dei califfi, vissuto intorno all'800 dopo Cristo e chiamato Muhammad ibn Musà detto al-Khuwa-

rizmī. Questo soprannome di al-Khuwarizmī significa semplicemente che era originario della provincia persiana del Korassan (poi chiamata khanato di Chiva). Muhammad al-Khuwarizmī compilò tra l'anno 800 e l'825 due opere di matematica, una delle quali è un libro di aritmetica e nella versione latina comincia con le parole "*Algoritmi dicit*". L'altra opera è un'algebra ingegnosa dal titolo *Alshebr Valmukabala*, il che significa press'a poco *Sistemazione e confronto*. Si dice che un'equazione è "sistemata" quando ha solo membri positivi, mentre "confronto" è l'eliminazione o la sottrazione di grandezze uguali dai due lati di un'equazione. Secondo Günther, la parola "algebrista" in Spagna sotto l'influenza araba si conservò fino ai tempi di Cervantes, poiché il "cavaliere dallo specchio" scavalcato da Don Chisciotte fu consegnato a un algebrista (un acconciaossi) per rimettergli a posto le membra.

Ed è il caso piú meraviglioso nella storia delle scienze che il nostro al-Khuwarizmī sia stato eternato due volte in diverse epoche. Il titolo della sua opera fornì il termine generale per il calcolo letterale e per tutte le discipline affini, mentre al-Khuwarizmī stesso, come vedremo, non aveva alcuna idea di un'algebra di terzo grado, come è il calcolo letterale. Egli rimase piuttosto al primo gradino, quello dell'algebra in parole. Il suo soprannome storpiato diventò d'altra parte il termine specifico per uno dei concetti piú profondi e piú generali della matematica, il che sarebbe press'a poco la stessa cosa come se di qui a migliaia d'anni qualche categoria matematica venisse chiamata "brunswickiana" dal paese d'origine di Gauss.

Per apprezzare adeguatamente tale denominazione e tutto il contenuto del concetto di "algoritmo" (una volta si diceva anche "algorismo"), dobbiamo vedere anzitutto dove la parola è nata e dobbiamo poi subito salire, come degni visitatori di Bagdad, sul tappeto

magico, che non ci porterà questa volta fuori del regno delle *Mille e una notte*. Abbiamo già scoperto dove la parola si trova per la prima volta, cioè all'inizio di un libro di aritmetica. Che cosa contiene questo libro? Una cosa per noi completamente priva di magía, e del tutto ovvia: le quattro operazioni, che ogni ragazzetto delle elementari conosce. Vi sono inoltre le due operazioni della moltiplicazione e della divisione per 2, la cui origine risale molto probabilmente alle forme grammaticali del duale, che nel sanscrito e nel greco antico completavano il singolare e il plurale. Ebbene, queste operazioni sono per noi ovvie, ma proprio per quella ragione che costituisce la loro magía; esse si basano infatti, e qui sta l'arcano, sul sistema piú geniale e completo creato fino allora, cioè il sistema della scrittura dei numeri secondo certi valori di posizione. Il fatto che con dieci segni simbolici, indipendenti da ogni singola lingua, si possano scrivere tutti i numeri dalla frazione piú piccola concepibile fino a quelli astronomici che si perdono nella nebbia dell'infinitamente grande, e ciò senza errore possibile, in modo inequivocabile e comprensibile a tutti, non ha l'uguale in tutto il mondo dello spirito. Di tutte le scienze al massimo la sola chimica possiede uno strumento quasi altrettanto perfetto nella scrittura simbolica degli elementi, la cui validità e completezza possono tuttavia essere distrutte ogni momento da qualche rivoluzione nelle attuali conoscenze, cosa impossibile con le cifre. Ma non si esaurisce qui la potenza magica del sistema dei valori di posizione, sistema che non è detto debba essere necessariamente decimale. Questo sistema dà sempre nuovi frutti e permette per la prima volta di eseguire con facilità realmente infantile le operazioni aritmetiche piú complicate, con una quantità di prove e di verifiche insite nel sistema stesso. Si ha cosí la prima macchina pensante, il cui uso è noto ad ogni scolaretto, la cui strut-

tura e il cui meccanismo interno non sono però così semplici come si presentano al profano. Uno che volesse veder più addentro, dovrebbe prima approfondirne con Gauss la teoria e imparare qualche cosa sull'analisi dei numeri primi, sui "moduli", sui "resti" e così via. Ma questo sia detto solo incidentalmente.

Al nostro al-Khuwarizmī spettò dunque il compito storico di raccogliere in un libro d'aritmetica il sistema decimale indiano, e lui stesso o un suo traduttore mise il nome del suo paese di origine, *Algoritmi*, sul frontespizio.

Vogliamo ora esaminare un poco più da vicino questo primo esempio di algoritmo, il più perfetto anzi di tutti gli algoritmi, per formarci un concetto della parte che vi ebbero le singole civiltà di quei tempi.

Dopo le indagini fondamentali compiute dal funzionario coloniale inglese Colebrooke, che nel 1816 pose per la prima volta nella sua giusta luce la matematica indiana, tanto che sulla sua traccia sorsero poi gli studi successivi non solo dell'Occidente, ma anche quelli dei ricercatori indigeni, si sa che gli antichi indiani contribuirono in più modi allo sviluppo della matematica. Il loro talento matematico, unito a una sfrenata fantasia, li rese atti alle più grandi scoperte, tra cui la maggiore è quella del sistema dei valori di posizione. Essi ebbero anche algebristi insigni, come Aryabhata (467 d. C.), Brahmagupta (VII secolo d. C.) e Bhaskaracarya (XII secolo d. C.). Scoprirono in modo indipendente la soluzione intera delle equazioni indeterminate e arrivarono fino all'algebra di terzo grado, cioè alla pura scrittura simbolica. La loro opera, tuttavia, ad eccezione della scrittura dei numeri, rimase appartata dallo sviluppo generale della matematica, e perciò non ha un valore determinante, ma piuttosto episodico. A ciò nulla cambia il fatto che Bhaskaracarya, per esempio, arrivi perfino a valutare esat-

tamente il limite di $\frac{a}{o}$ quando dice: "Quanto più diminuisce il divisore, tanto maggiore diventa il quoziente. Se il divisore diventa estremamente piccolo, il quoziente diventa estremamente grande. Ma fino a quando si può dire che è di tale e tal'altra grandezza, non è ancora arrivato all'estrema grandezza, poiché si può sempre dare un numero maggiore di esso. Il quoziente perciò (quando il divisore è ridotto al minimo possibile, cioè zero) diventa di grandezza indefinibile e si può con ragione chiamare infinito".

Se queste conoscenze già mature sul calcolo infinitesimale fossero uscite dal regno magico della meditazione e dalle scuole indiane per penetrare fin da allora in Occidente, andando a finire in buone mani, forse la storia del mondo si sarebbe sviluppata altrimenti. Ma ciò non avvenne, e l'Occidente non seppe neppure, fino al secolo diciannovesimo, che Brahmagupta distingueva le incognite con diversi colori, e che l'algebra indiana aveva in generale una veste assai poetica. Cosí dice Bhaskaracarya nel suo capitolo sull'aritmetica intitolato *Lilavati*: "Bella fanciulla dagli occhi lucenti, dimmi tu, se conosci l'arte dell'invertire, qual è il numero che moltiplicato per 3, aumentato dei $\frac{3}{4}$ del prodotto, diviso per 7, diminuito di un terzo del quoziente, moltiplicato per se stesso, diminuito di 52, mediante estrazione della radice quadrata, addizione di 8 e divisione per 10, dà infine il numero 2". Se questa Lilavati era effettivamente una bella ragazza, e non come alcuni storici opinano la rappresentazione allegorica dell'arte aritmetica stessa, e anche se comprendeva il "metodo dell'invertire", i suoi occhi lucenti devono essersi un po' offuscati prima di arrivare a sapere che il calcolo procede in questo modo: $(2 \cdot 10 - 8)^2 + 52 = 196$; $\sqrt{196} = 14$

e $\left(14 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{4}{7}\right) : 3 = 28$, poiché tutte le operazioni aritmetiche indicate in parole vanno eseguite in senso inverso. Infatti $28.3=84$; aggiungendo $\frac{3}{4}$ di 84, cioè 63, si ha 147; 147 diviso 7 dà 21, e sottraendo $\frac{1}{3}$ di 21 fa 14, che moltiplicato per se stesso dà 196. Sottraendo 52, 196 si riduce a 144, la cui radice quadrata è 12; aggiungendo 8 si ottiene 20, e questo diviso per 10 dà effettivamente per risultato 2, come era richiesto.

Ancor piú poetico ci appare il problema seguente: "$\frac{1}{5}$ di uno sciame di api si posa su un fiore di kadamba, $\frac{1}{3}$ su un fiore di silindha. Tre volte la differenza tra i due numeri volò sui fiori di un kutuja, e rimase una sola ape che si librò qua e là nell'aria, ugualmente attirata dal grato profumo di un gelsomino e di un pandamus. Dimmi tu ora, donna affascinante, qual era il numero delle api". Non si trattava già di un grosso sciame: se indichiamo infatti con x il numero cercato, si ha: $x = \frac{x}{5} + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}\right) 3 + 1$, ossia, $3x + 5x + 6x + 15 = 15x$, da cui $x = 15$.

Abbiamo citato questi esempi solo incidentalmente, e ritorniamo ora all'algoritmo del sistema dei valori di posizione. Che esso sia una scoperta indiana non vi è piú dubbio oggi, anche se non si conosce con precisione l'epoca di origine. Di sicuro si sa che era già altamente perfezionato prima del tempo di al-Khuwarizmī. Come abbiamo detto, l'importanza del sistema non si limita alla possibilità di avere una comoda scrittura dei numeri; il lato specificamente "algoritmico" consiste nella sua attitudine a permettere l'esecuzione delle operazioni aritmetiche con una sem-

plicità mai prima raggiunta, preziosa soprattutto nella moltiplicazione e nella divisione. Non possiamo qui perderci in particolari teorici, osserviamo solo che il sistema dei valori di posizione non è altro che una serie decrescente di potenze della forma $a_0\, g^n + a_1 g^{n-1} + \ldots + a_{n-2} g^2 + a_{n-1} g^1 + a_n\, g^0$, dove a_0 fino ad a_n sono i coefficienti e g^0 fino a g^n sono le potenze del numero base. Nel sistema decimale si ha $g^0 = 10^0 = 1$ fino a $g^n = 10^n$. Solo i coefficienti si scrivono e la "posizione" indica per quale potenza del numero base si deve moltiplicare ciascun coefficiente. Nel numero 3457 il 3 è mille volte piú grande che nel numero 72.553. Perciò bastano in tutti i casi 10 segni, tra i quali anche lo zero, inventato per ultimo e chiamato in indú "il vuoto" (*sunga*). Questo zero completa il sistema, perché indica l'assenza di certe potenze del numero base, oppure la presenza di coefficienti nulli. Proprio lo zero è una genuina invenzione indiana e cosí anche la denominazione dei numeri come 10, 100, 1000 ecc. fino a 10^{20} con termini appositi. Lo zero fu chiamato dagli arabi, probabilmente in Egitto, *as sifr*, traduzione dell'indiano *sunga*. Dalla parola araba vennero i termini "cifra" e "zero".

Abbiamo parlato delle proprietà algoritmiche della nuova aritmetica di posizione. Certo, anche i greci e i romani moltiplicavano e dividevano; dovevano però, per esempio nella moltiplicazione, formare in realtà prodotti parziali secondo la proprietà distributiva, e poi sommare questi prodotti parziali, come se si trattasse di un polinomio. I numeri 320 e 47 venivano moltiplicati come $(300 \times 40) + (20 \times 40) + (300 \times 7) + (20 \times 7) = 12.000 + 800 + 2100 + 140 = 15.040$. Abbiamo scelto intenzionalmente un esempio semplice, facilitato ancora dallo zero finale di 320, che fa risparmiare due prodotti parziali. S'immagini però di usare questo sistema per moltiplicare tra loro 932.581 e 764.822, oppure espressioni frazionarie, conosciute solo sotto

forma di frazioni proprie, e si comprende facilmente perché è stato detto che una moltiplicazione con parecchie cifre (per tacere della divisione), eseguibile oggi da ogni scolaro delle elementari, era allora un problema degno dei matematici piú insigni e dei virtuosi del calcolo.

Gli indiani viceversa riconobbero presto, dopo il perfezionamento del sistema dei valori di posizione, i

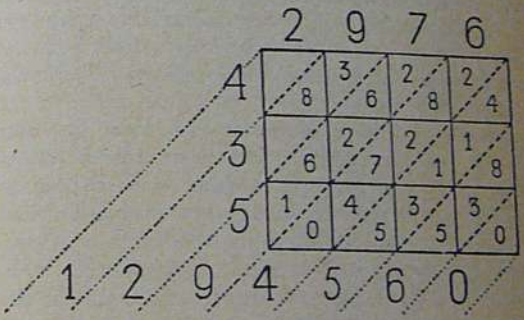


FIG. 5

vantaggi e le possibilità insite nel sistema stesso. Diamo qui, come esempio del loro modo di affrontare le operazioni aritmetiche, una delle loro regole di moltiplicazione, che portava il nome di "fulminea". Si scrivevano i numeri da moltiplicare ai margini di un quadrato o rettangolo (fig. 5), secondo che il numero delle cifre fosse uguale o disuguale. Prendiamo il rettangolo come il caso piú generale, e supponiamo che si debbano moltiplicare tra loro 2976 e 435. Si formano ora senza riguardo al valore di posizione i prodotti parziali 4×2, 4×9, 4×7 e 4×6 e si scrivono nella prima riga orizzontale in modo che le unità siano nel triangolo inferiore e le decine nel triangolo superiore formato dalla diagonale delle singole caselle.

Non si va piú in là delle decine perché il prodotto parziale piú alto concepibile, 9×9, dà 81. Si tratta, come si vede, della tavola pitagorica. Riempiamo ora la seconda riga orizzontale coi prodotti 3×2, 3×9, 3×7 e 3×6, e cosí via fino a riempire completamente il rettangolo, e tutto è fatto. Rimane ora solo da eseguire la somma di tutti i numeri che si trovano tra due linee punteggiate, cominciando da destra e andando verso sinistra. Si ha perciò anzitutto, zero, poi $5+3+8$, poi $5+3+1+1+4$, poi $0+4+7+2+8+2$, e cosí via, eseguendo naturalmente il riporto come si fa nell'addizione. Il risultato si scrive nell'orlo inferiore del rettangolo.

A noi questa moltiplicazione "fulminea" non sembra piú cosí meravigliosa come agli antichi, abituati a dover calcolare coi prodotti parziali. Vi sono anche qui, è vero, dei prodotti parziali, ma scompaiono completamente dalla coscienza del calcolatore, il quale non ha da far altro che rivolgere meccanicamente la sua attenzione ai quadrati e alle diagonali, eseguendo semplici operazioni di tavola pitagorica. A tutto il resto provvede automaticamente l'algoritmo, la macchina pensante, il cui ingranaggio si nasconde sotto il sistema delle posizioni; anche nell'addizione finale, dove il calcolatore dice solo: "$5+3+8=16$, con riporto di 1", e scrive il 6. Non ci si domanda né si pensa affatto se quest' "uno" è una decina, un centinaio o un migliaio; lo si aggiunge come addendo alla colonna di ordine superiore ed è finito. Se in questa colonna non vi sono che zeri, si scrive semplicemente il riporto. Ma vi è di piú. Il concetto di colonna "di ordine piú elevato" non viene né espresso né pensato una sol volta. Questa colonna si trova una posizione piú a sinistra, e si deve avanzare da destra a sinistra. La regola è tutta qui. Di tutto il resto si può lasciare che si occupino i teorici, se questo li diverte. La stessa cosa vale ancor oggi per le quattro operazioni: ognuno di

noi le ha apprese da bambino e le adopera a perfezione, talvolta perfino da virtuoso, ma forse non c'è uno su mille che comprenda quello che sta facendo. Le macchine calcolatrici inventate da Leibniz sono nient'altro che la traduzione meccanica dell'algoritmo grafico. E osserviamo, anticipando gli eventi, che questo speciale algoritmo del calcolo in base ai valori di posizione ha quattro gradi. Primo, il calcolo mentale, che riesce però solo a uomini d'eccezione dotati di grande immaginativa. Secondo, il calcolo scritto. Terzo, la macchina calcolatrice azionata a mano, nella quale alcune operazioni parziali vengono eseguite con una manovella o mediante spostamento di un regolo. E infine, quarto, la macchina calcolatrice automatica, nella quale non si fa altro che fissare l'operazione da eseguire e i numeri (moltiplicando, moltiplicatore, ecc.), e la macchina, azionata elettricamente, mette in moto l'algoritmo. In questo automatismo, sotto una forma o l'altra, sta in generale il significato e il fine ultimo di un algoritmo, e l'efficienza maggiore o minore di ogni algoritmo si può giudicare dal suo maggiore o minore avvicinarsi a un completo automatismo. Con ciò non si pensa soltanto all'economia di lavoro mentale: questa ha la sua importanza, ma non la maggiore. Quel che piú conta è che l'algoritmo con l'aumentare della complicazione dei problemi agisce automaticamente come principio ordinatore e riassuntivo, e può valicare, come già detto, abissi nei quali il semplice potere intellettuale dell'uomo non arriva a penetrare. Vedremo tutto ciò all'opera piú tardi a proposito degli immaginari e del calcolo infinitesimale secondo la scrittura di Leibniz.

Il nostro tappeto magico comincia però a volare oltre tutti i confini, probabilmente perché solo nel suo paese d'origine è divenuto pienamente consapevole dei propri poteri. Lo abbandoneremo perciò per qualche tempo, ed entreremo nel laboratorio di al-Khuwa-

rizmī per vedere se, oltre all'insegnamento dell'aritmetica secondo il sistema dei valori di posizione, egli ha anche coltivato altre discipline matematiche. Abbiamo già detto che gli arabi si dedicarono all'algebra e che proprio la parola "algebra" deriva dal titolo di un'opera di al-Khuwarizmī. Sfogliamo perciò quest'opera e vediamo in che modo al-Khuwarizmī trattava le equazioni. Dall'eccellente trattato di Tropfke ricaviamo uno di questi problemi algebrici, e cioè la risoluzione dell'equazione quadratica mista $x^2+21=10x$. Al-Khuwarizmī ragionava così (designando x^2 ed x con parole tradotte più tardi "*census*" e "*radix*"): "$x^2+21=10x$ significa che, aggiungendo 21 al quadrato di un numero, la somma è uguale a dieci volte questo numero. La regola richiede che tu dimezzi il numero delle x, il che fa 5. Moltiplica questo numero per se stesso ed hai 25. Sottrai quel 21 che hai nominato insieme al quadrato: rimane 4. Estrai la radice ottenendo 2, e sottrai questo 2 dalla metà del numero delle x, cioè da 5. Rimane così 3. Questa è la radice del quadrato che cerchi: il quadrato è 9. Se vuoi, aggiungi anche il 2 alla metà delle radici, cioè alla metà del numero delle x, il che fa 7. Questa è la x e il quadrato è 49. Quando un problema ti porta a questa forma normale, verifica l'esattezza della soluzione che nai ottenuta con l'addizione. Se non combina, ogni dubbio viene eliminato con la sottrazione. La soluzione mediante addizione e sottrazione può ottenersi solo con questa delle tre formule normali, nelle quali vien dimezzata la x. Osserva ancora che quando tu in questo caso dimezzi ed elevi a quadrato la x, ed avviene che questo risultato è minore del termine costante che era da sommare con x^2, non vi è soluzione possibile. Se è uguale al termine costante, allora x è uguale alla metà del numero delle x senza aumento o diminuzione".

Abbiamo riferito letteralmente questo passo, non solo per dare un esempio tratto dall'*Alshebr Valmu-*

kabala ma anche per ricavarne le caratteristiche e il contenuto dell'algebra araba. Vediamo anzitutto, dal punto di vista puramente formale, che l'opera degli arabi rappresenta un sensibile passo indietro rispetto a Diofanto. La scrittura simbolica dell'algebra sincopata di Diofanto ha nuovamente ceduto il posto ad un'algebra esclusivamente in parole. Dal punto di vista del contenuto vi è però innegabilmente da constatare un progresso; infatti il metodo di risoluzione di al-Khuwarizmī, corrispondente alla nostra formula $\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - c}$, è proprietà originale degli arabi (*). Al-Khuwarizmī vi aggiunge alcune dimostrazioni geometriche, seguendo l'esempio greco, ma questo non fa altro che annullare i suoi progressi puramente algebrici. Con questo sistema infatti non era in grado di riconoscere la seconda soluzione negativa, che nel nostro caso deve esistere quando $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - c}$ è maggiore di $\frac{a}{2}$. Perciò anche in al-Khuwarizmī si hanno due soluzioni dell'equazione quadratica mista solo nel caso in cui entrambe le soluzioni sono positive, come nell'esempio concreto citato. Di queste soluzioni egli preferisce inoltre quella $\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - c}$ all'altra $\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - c}$, perché gli sembra per qualche ragione piú naturale, e non considera in nessun caso le soluzioni negative scoperte dagli indiani. Dichiara impossibile la soluzione immaginaria, quando c è mag-

(*) $\frac{a}{2}$ è qui positivo, poiché 10x nell'equazione proposta sta a destra dell'uguale, perciò sarebbe effettivamente negativo nel polinomio dell'equazione.

giore di $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ La parola "impossibilis" accompagna i numeri immaginari per piú di dieci secoli ancora, fino a Descartes, il quale la sostituisce col termine meno perentorio di "immaginario".

Non riteniamo necessario entrare in altri particolari sulla matematica araba, benché essa si presenti indubbiamente molto interessante. In che consiste dunque, ci domandiamo, il nuovo punto saliente determinato dagli arabi? È un periodo d'indagine e di studio, o magari soltanto attività di traduttori e di compilatori, originata dal fatto che i califfi impiegarono accidentalmente come medici di corte dei cristiani nestoriani e che questi possedevano e portarono con sé il bagaglio della cultura ellenica? Oppure gli arabi, tanto d'Occidente che d'Oriente, hanno veramente creato nei secoli, fino alle università moresche di Siviglia, Toledo e Granata, qualche cosa di duraturo, che superi la semplice amministrazione del patrimonio indiano e greco?

A queste domande non è facile la risposta. Ed è tanto piú difficile in quanto nella storia della scienza anche l'uso e l'adattamento di una cultura tramandata può acquistare spesso importanza decisiva nei suoi effetti successivi. Forse molte glorie sono immeritate e si è sviati dal perpetuarsi di certi nomi e di certe espressioni; il fatto però che noi fino a poco tempo fa abbiamo chiamato il nostro sistema di cifre col nome di "arabo", che le parole "algebra", "algoritmo", "alidada", "zenit", nadir", "almukantarat", "cifra" "zero" non si possono eliminare dal nostro patrimonio linguistico, che il nostro cielo è pieno di stelle dai nomi arabi, come Alcor, Mizar, Betelgeuse, Rigel, Algol, Aldebaran, Fomalhaut, Toliman, Kochab, Ras-Alhague, Zuben-el-Schemali per citarne solo alcune, dovrebbe significare qualche cosa di piú di una usurpazione di paternità, o una semplice attività d'intermediari.

Non si può negare che gli arabi abbiano aggiunto relativamente poco al contenuto materiale della nostra scienza. Arricchirono la geometria, rispetto ai greci, solo nella trigonometria e nell'astronomia. Dal punto di vista formale però la macchina pensante contenuta nell'algebra e nell'aritmetica fu da loro chiaramente riconosciuta, anche se non scoperta, e liberata dalla tutela e dal peso della geometria. In armonia col loro temperamento piú vicino a una concezione cristallizzata che non a una concezione mobile e organica della vita, svilupparono piuttosto il raziocinio che l'intuizione. Furono matematici di talento, uomini diligenti e animati da vivo interesse. Seguendo la tendenza islamica alla diffusione e al proselitismo, promossero l'insegnamento scolastico, che aumentò d'importanza a causa della loro attività commerciale. Introdussero dovunque la loro cultura, all'occorrenza anche col ferro e col fuoco, e non mancarono di far seguire alle conquiste sanguinose la diffusione della scienza matematica. Ma però, malgrado le loro tendenze pratiche, non erano neppur essi ingegneri, cioè non affrontarono la natura con lo strumento della matematica per metterla al proprio servizio nelle macchine, dopo averle strappato i suoi segreti. In conformità alle loro tendenze magiche, spesso la matematica degli arabi andava a finire negli indovinelli, nella cabalistica e nell'astrologia. Ancora una volta, come avevano fatto i pitagorici, il numero, i suoi rapporti col mondo e le relazioni intercedenti tra i numeri divennero oggetto di mistero e di occultamento. La cabala acquistò la fama che ancor oggi le attribuiamo, e alle menti piú illuminate dev'essere apparso chiaramente che assai piú magica del numero in sé era la macchina pensante dell'algoritmo. Per insegnare e diffondere la matematica sono necessarie delle regole — queste conducono però a generalizzare, e la generalizzazione presuppone una conoscenza esatta delle mutue relazioni. Questo

processo porta necessariamente a far sí che la matematica diventi a un certo punto una specie di apprendista stregone. L'istrumento comincia all'improvviso a pensare per noi e ci trascina in campi dei quali non avevamo prima la minima idea. Cosí la matematica diventa un vero "Sesamo, apriti".

Il tappeto magico ci ha trascinati un'altra volta nel tempo, ma questa volta ha rapito solo i nostri pensieri. Poiché dovevano ancora accadere molti eventi, prima che con la nascita di una nuova matematica cambiasse anche l'aspetto del mondo esteriore. Proprio nell'epoca in cui un'altra fede ardente inviava i suoi eserciti per il mondo, nell'epoca in cui i Crociati, nella violenta esuberanza di una civiltà che diventava consapevole di se stessa, combattevano vittoriosi o morivano di stenti nei deserti arabi, apparivano le prime torri e le prime vôlte gotiche, preannunciando un Rinascimento dello spirito nella sua integrità. Come tutte le grandi civiltà dei popoli caucasici, questo movimento nacque in una penisola. Dopo le penisole dell'Asia Minore, della Grecia e dell'Italia, la "Penisola europea" iniziò la sua missione.

Tutto era pronto, le sementi sparse erano ancora piene di vita, anche se i loro seminatori erano morti e sepolti o combattevano la loro estrema battaglia. Tutto era pronto: lo spirito faustiano poteva iniziare il suo lavoro. Spuntava l'alba dei nuovi popoli e la fresca potenza di molte nazioni era assetata di una azione che le crociate e le cattedrali gotiche preannunciavano. Al pari della ferita inguaribile inflitta dal mago Klingsor al cavaliere del Graal, lo spirito magico aveva trasmesso allo spirito faustiano la sua eterna bramosia di superamento.

VII

LEONARDO DA PISA

Il ridestarsi della matematica

In mezzo a vaste imprese, tra battaglie e crociate, tra esilî e proscrizioni, il piú tragico degli imperatori Hohenstaufen, Federico II, tiene corte a Palermo. C'è aria di festa, si bisbiglia, si fa rumore, come per un grande avvenimento. È cosí veramente? Non si sa — è l'imperatore che lo ritiene tale. La gara che si deve svolgere non è una contesa di cantori, un esercizio cavalleresco, un racconto di gesta eroiche, ma riguarda la risoluzione delle equazioni cubiche. Maestro Giovanni da Palermo proporrà dei problemi a un illustre forestiero, e questi li risolverà probabilmente alla perfezione. Lo straniero si chiama Leonardo da Pisa ed è il piú grande algoritmista del mondo, benché la sua opera principale porti l'insegna del nemico e abbia per titolo *Liber abaci*.

Indubbiamente viviamo ancora nel regno delle favole su questo bel suolo siciliano. Il capriccio dell'imperatore ci riconduce alle discussioni che si facevano alla corte dei tiranni di Siracusa, ci fa ripensare ai Tolomei, al re indiano che all'inventore degli scacchi propose il famoso problema dei chicchi di grano, alle usanze di corte dei grandi califfi al-Mansur, Harun ar-Rashid e al-Ma'mun. Comprendiamo perciò da dove Federico II ricevette l'impulso per il suo comportamento piuttosto singolare. Ma chi è Leonardo da Pisa? Che cos'è accaduto nel frattempo alla matematica nei paesi d'Occidente? È infatti poco verosimile che in

tanti secoli si sia fatto completamente a meno della matematica.

Prima di occuparci della gara di Palermo dobbiamo seguire le varie tappe della via che condusse alla rinascita della matematica come scienza. Abbiamo accennato a molte cose; vogliamo ora esporle piú in particolare, a costo di andare oltre il nostro compito. Si tratta infatti dell'opposto di un periodo di splendore della matematica, si tratta della peggiore decadenza che si sia verificata dai tempi di Pitagora.

Il fatto che i romani non si siano segnalati come matematici risulterà chiaro dal silenzio sotto il quale li abbiamo passati. Fu però l'eredità politica dei romani a essere raccolta dai popoli europei. E i romani, come osserva Zeuthen, lasciarono ai loro eredi meno che gli antichi egizî ai greci. Una matematica di Boezio, l'eminente scrittore romano cristiano vissuto nel 480-524 d. C. e giustiziato dal re Teodorico per motivi politici, rappresenta tutta la sapienza del primo medioevo. Essa è una rielaborazione di Nicomaco (II secolo d. C.) e non poteva certo far progredire la matematica, tanto piú che era piena di interpretazioni errate. Cosí per esempio i numeri figurati (disposti in forma di triangolo, di piramide, ecc.), i quali in fondo non sono altro che successioni o serie, erano ritenuti come superfici e volumi delle figure da essi formate. Quel che attraverso Boezio venne tramandato furono alcune regole pratiche usate dagli agrimensori romani, e anche queste in parte trascritte erroneamente, di guisa che non vi era nulla che potesse far progredire la nostra scienza. L'eredità dell'ellenismo era passata in massima parte a due città, Bisanzio e Bagdad, politicamente e materialmente molto distanti l'una dall'altra, che l'amministrarono in modi assai diversi.

Mentre i bizantini possedevano e conservavano gelosamente tutti i libri di matematica degli antichi greci, non si preoccuparono che assai limitatamente di farne

uno studio serio, e tanto meno poi di costruirvi su qualche cosa di nuovo. Lasciarono dormire quel tesoro, di guisa che la comprensione della matematica diminuí sempre piú di secolo in secolo, e i loro matematici si trastullarono con quisquilie, quando non fecero addirittura dei passi indietro, affermando per esempio che il numero π è inferiore a 3.

In tutt'altro modo agirono gli arabi. Sappiamo già che essi cercarono la scienza greca con l'avidità di un popolo giovane, la resero piú accessibile in parecchi punti e la fusero con la sapienza indiana. I dotti arabi dei tempi successivi realizzarono progressi importantissimi. Cosí nel decimo secolo dopo Cristo l'aritmetico Alkarchi estese la notazione di Diofanto e osò fare il passo rivoluzionario di comprendere tra i numeri anche le grandezze irrazionali. Lo stesso indirizzo, che potremmo chiamare moderno, viene seguito nel dodicesimo secolo da Alchaijami, al quale appare chiara per la prima volta la separazione tra significato aritmetico e significato geometrico delle equazioni. Alchaijami constata inoltre che per ragioni di dimensione è possibile la rappresentazione geometrica diretta degli irrazionali solo fino alla terza potenza, mentre per potenze piú elevate occorrono relazioni composte. Nello stesso secolo lavora nell' "Arabia Occidentale", cioè in terra di Spagna, a Siviglia, il grande Gabir-ibn-Alflah, noto sotto il nome di Geber, il quale realizza grandi progressi nella trigonometria sferica, e in questo trova una mente affine in Abul Vafa, compilatore di tavole trigonometriche (tavole delle tangenti) assai superiori a quelle di Tolomeo, dove sono calcolate vere e proprie funzioni angolari di 10 in 10 primi, con un errore inferiore a $\frac{1}{60^5}$. Il ridestarsi a una nuova vita della matematica in terra d'Occidente era perciò solo questione di interesse scien-

tifico e non di possibilità. Tutta la produzione precedente si trovava, come è già detto, imbalsamata a Bisanzio, o presso gli arabi sotto l'aspetto di scienza progredita. Il grande Scoto Eriugena aveva un bell'invocare un piú profondo studio della matematica: era come se parlasse alle orecchie di bambini. E soprattutto l'aura di magía che avvolgeva la matematica degli arabi può aver promosso, ma nello stesso tempo ostacolato, l'indagine dei segreti in essa contenuti.

Infine i contatti esteriori tra i popoli dettero il primo colpo. Gli arabi, i mori, o come si vuol chiamarli, erano penetrati in Spagna, in Sicilia e in altri luoghi dell'Occidente. Le loro università coltivavano la matematica, a Toledo, a Siviglia, a Cordova. E due movimenti in senso contrario dell'Occidente portarono a nuovi contatti e compenetrazioni, cioè il commercio orientale delle tre potenti repubbliche italiane di Venezia, Genova e Pisa, e le crociate.

In quest'epoca storica avvenne che il pisano Leonardo, detto il figlio di Bonacci, o brevemente Fibonacci, viaggiasse in lungo e in largo nel Mediterraneo, a causa della professione del padre che era una specie di funzionario consolare, e diventasse scolaro degli arabi fin da fanciullo. Dopo che, oltre a questo, ebbe al pari di Pitagora grandemente ampliate le sue conoscenze con numerosi viaggi che lo condussero in Egitto, in Sicilia, in Siria, in Grecia e in Provenza, fu in grado di diventare il vessillifero della rinascita della matematica nella cultura occidentale. Ciò indipendentemente dalla questione se egli stesso abbia personalmente contribuito in modo decisivo al progresso della matematica.

Prima però di chiarire tale questione, dobbiamo accennare alla lotta tra abachisti e algoritmisti, che il rinnovato studio della matematica introdusse nel nostro mondo culturale. Questa lotta o contrasto di opinioni riguardava due sistemi di calcolo, "per righe" o "con

la penna", come si disse piú tardi. Nei casi piú semplici l'abaco, che si conserva ancor oggi sotto la forma del pallottoliere per i bambini, è una tavoletta sulla quale le colonne per le varie potenze decimali sono divise da righe. Non si usa lo zero, ma si lascia vuota la colonna quando, come per esempio in 750 e 3009, non è occupata in uno o piú posti. I calcoli si fanno con dei gettoni. In origine si mettevano nella colonna corrispondente tanti gettoni quanti ne comportava il coefficiente della potenza di dieci; cosí nell'esempio precedente, 7 per le centinaia, 5 per le diecine, e nessuno per le unità; oppure, nel caso di 3009, 3 per le migliaia e 9 per le unità, lasciando vuote le colonne delle centinaia e delle diecine. Poiché questo sistema primitivo di calcolo, specialmente nell'addizione di parecchi numeri, diventava faticoso da seguire, si cominciò per semplicità a introdurre gettoni di valore diverso, con sopra scritti i numeri dall'1 al 9. Con ciò l'abaco si avvicinava all'algoritmo, il che diventò piú chiaro al terzo stadio, quando cioè si scrissero nelle colonne le cifre, sopprimendo addirittura i gettoni. Non vogliamo neppure qui entrare in troppi particolari, diciamo solo che tanto una scuola come l'altra, tanto gli abachisti che gli algoritmisti, avevano delle buone teste tra i loro fautori. Un grande abachista per esempio era Gerberto, che poi divenne papa Silvestro II.

La vittoria fu degli algoritmisti. La contesa dei due, diciamo cosí "partiti", ognuno dei quali aveva, oltre la dottrina principale, un suo programma comprendente le estrazioni di radice e altro ancora, mise in discussione molte questioni di aritmetica e produsse una agilità formale dei matematici d'Occidente, che non scomparve mai piú. Nel medioevo non vi fu nulla di simile al disprezzo dei greci per l'aritmetica, ché anzi proprio all'inizio dei rinnovati studi matematici l'aritmetica e la geometria si presentarono con parità di diritti, secondo il modello dell'ultima produzione

araba. All'aritmetica veniva anzi riconosciuta una certa priorità logica.

Ci siamo posti piú sopra la domanda se Leonardo da Pisa sia da classificare tra le grandi figure della matematica. Ha forse scoperto nuove categorie del pensiero e dell'indagine matematica? A questa domanda dobbiamo rispondere negativamente. Leonardo fu però un matematico di gran talento, nelle cui opere brilla talvolta il lampo di nuove concezioni, come quando accetta la soluzione negativa di un'equazione e osserva che questa soluzione non avrebbe senso interpretata come "capitale", ma lo avrebbe come espressione di un "debito". In occasione della gara di Palermo, Maestro Giovanni gli propose l'equazione cubica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ di cui Leonardo dette la soluzione approssimata $x = 1^0\ 22'\ 7''\ 42'''\ 33^{IV}\ 4^{V}\ 40^{VI}$, senza per altro rivelare come era pervenuto a questo valore. In essa 1^0 significa l'intero, $22'$ la frazione $\frac{22}{60}$, $7''$ la frazione $\frac{7}{3600}$, ecc., sempre in frazioni sessagesimali. Ebbene, le ultime e piú esatte verifiche di questa soluzione hanno dimostrato che il valore approssimato dato da Leonardo è di appena $\frac{1}{31.104.000.000}$ maggiore di quello ottenuto coi metodi odierni. Si deve anche accennare che Leonardo nel trattare il suo "problema dei conigli" costruí la prima serie periodica nella storia della matematica. In questo problema si domanda quante coppie di conigli si ottengono in un anno, supponendo che ogni coppia produca ogni mese un'altra coppia la quale a sua volta dal secondo mese in poi sia in grado di riprodursi. Sono esclusi i casi di morte. Perciò alla fine del primo mese si ha la prima coppia, e una coppia prodotta da questa, alla fine del secondo mese si è aggiunta una terza coppia, alla fine del terzo mese però vi sono due coppie in piú poiché

ora anche la seconda coppia ha cominciato a riprodursi, e cosí via. Si ottiene cosí per un anno la progressione 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, nella quale ogni numero successivo viene formato secondo la legge $a_{r+1} = a_r + a_{r-1}$. Per esempio, il termine 5, cioè $a_3 + 1$, verrebbe formato dalla somma di a_3 e a_2, cioè $3 + 2$; e 21 come settimo termine sarebbe formato da $13 + 8$, e via dicendo.

Anche se Leonardo da Pisa, oltre i problemi indicati, ne ha risolti altri piú complessi, anche se si è dimostrato maestro nelle equazioni determinate e indeterminate, nella falsa posizione semplice e doppia, nelle estrazioni di radice e in altre numerose conoscenze aritmetiche e geometriche, è in primo luogo la sua posizione storica che ci spinge a considerarlo tra le grandi figure rappresentative della matematica. Leonardo è, si può dire, il primo matematico di vaglia dell'evo moderno, il primo riflesso di quanto aveva prodotto prima di lui lo spirito occidentale, pur cosí diverso, della fine del medioevo. La sua opera è rappresentativa dell'evoluzione di tutti i popoli occidentali, anche se egli si rivolge solo ai "popoli latini", ai quali vuole restituire la perduta arte della matematica.

VIII

NICOLA D'ORESME

Matematica e natura

Prima di procedere oltre, occorre fare un'osservazione fondamentale, valida per tutto il medioevo e per l'inizio dell'età moderna. Il fatto di cui vogliamo parlare si trova in quasi tutte le storie della matematica, e anche una storia per sommi capi come la nostra non può passare sotto silenzio le novità che a guisa di costellazione sono entrate nel mondo d'Occidente.

Abbiamo visto che la matematica ellenica, al pari della sua dea protettrice Pallade Atena, era uscita armata dalla testa di Giove e si mantenne di poi quasi del tutto pura, come un'arte gelosamente custodita. In tal modo divenne grande e illustre, ma perse il contatto con la vita, per cui presto s'irrigidí e si spense. Per lo stesso motivo fu anche completamente individualistica e s'identificò nei nomi dei cultori che religiosamente la officiavano.

Anche nell'evo moderno osserveremo un fenomeno simile, un'epoca classica della matematica. Vi sono però differenze essenziali tra un movimento che costruí dal nulla una scienza e uno sviluppo successivo, fondato su un mondo già elevatosi a grandi altezze, e al quale vien solo adattata un'anima diversa.

Si deve naturalmente convenire che dal punto di vista puramente formale molto si ripeté di quello che era già avvenuto sul terreno dell'antichità classica. Si ripeté tuttavia solo in parte sotto l'influenza diretta del precedente periodo di splendore, e per il resto fu determinato da altre cause. Quattro grandi correnti

di civiltà — italiani, tedeschi, francesi, inglesi — lavorarono con moventi interni ed esterni e in condizioni assai diverse alla formazione della nostra scienza, e su tutto dominò in principio, come fattore unitario, la Chiesa cattolica, poi come fattore di scissione l'antitesi tra il pensiero cattolico e quello protestante, se per il momento si prescinde dall'influsso della filosofia, che piú tardi si fece sentire profondamente. A questo si aggiunse un'istruzione scolastica intensiva, influenzata a sua volta dalla struttura religiosa e sociale.

Con tutto ciò vogliamo significare che d'ora innanzi la nostra esposizione dovrà riferirsi sempre piú ai periodi storici anziché alle singole personalità, poiché spesso non furono i grandi matematici a introdurre le novità piú salienti, e ciò specialmente nel periodo preparatorio che va fino a Descartes.

Questo chiarimento è necessario, ad evitare che il lettore si formi un concetto impreciso e si meravigli di trovare appena citati nomi di gran fama come quelli per esempio di un Regiomontano o di un Peuerbach, mentre vengono designati quali rappresentativi di un dato periodo matematici assai meno conosciuti. Questi nomi però devono essere intesi non tanto come compendio e simbolo quanto come esemplificazione tra quelli piú luminosi, poiché dal periodo al quale siamo arrivati fino a Descartes vi è da considerare l'opera non di singoli uomini ma di tutta una civiltà. E la matematica crebbe sotto l'impulso di un complesso di forze, alle quali parteciparono in misura diversa tutti i popoli piú importanti della terra.

È qui il luogo di esaminare i fattori che accompagnarono e fecero progredire la nuova èra. In Italia, come abbiamo visto a proposito di Leonardo da Pisa, fu il commercio a influire in doppia guisa sulla matematica, e cioè non solo mediante i viaggi e i contatti tra i popoli, ma anche per i problemi dei quali

imponeva la risoluzione. Senza l'aritmetica non sarebbe stato possibile rendersi padroni della contabilità, del calcolo monetario, del calcolo degli interessi, della geografia, dell'astronomia, specialmente quando si aveva a che fare con buoni calcolatori come gli arabi e con problemi che diventavano sempre piú complicati.

All'impulso esterno del commercio si affiancò ben presto quello interno della filosofia, alimentata anche da correnti religiose di pensiero. Con la fondazione delle università di Oxford, di Parigi e di Bologna, già famose al tempo di Leonardo da Pisa, si era ridestata una nuova cultura dello spirito, che fu chiamata piú tardi " scolastica" dagli umanisti, in senso per metà dispregiativo. Vedremo però tra poco che proprio da queste scuole filosofiche sorsero forse gl'impulsi piú decisivi per l'ulteriore progresso della matematica, e apparirà evidente che le scienze naturali, le quali si sentivano piú o meno agli antipodi della scolastica, ricevettero da questa, senza quasi accorgersene, la loro arma piú potente. Si tratta del gruppo di problemi che abbiamo già incontrato in Archimede: dei concetti di continuità e d'infinito e di un nuovo concetto, che nacque solo in terreno "faustiano", il concetto di funzione.

Torniamo ora ai tempi di Leonardo da Pisa, all'inizio del secolo decimoterzo. Già mentre egli era in vita ebbe un potente rivale nel tedesco Giordano Nemorario. Non entreremo nei particolari della vasta opera di questo frate domenicano, che esercitò grande influenza in tutte le direzioni; metteremo appena sotto la lente alcune proposizioni introduttive della sua dissertazione sui triangoli (*De Triangulis*), le quali ci mostrano in modo sorprendente fino a che punto lo spirito "faustiano" si era allontanato dai suoi modelli arabi e greci, rendendosi indipendente. Vi leggiamo definizioni che potrebbero appartenere al di-

ciannovesimo secolo ed essere attribuite a Bolzano o a Dedekind. Per esempio, Giordano dà queste definizioni: "La continuità è l'impossibilità di distinguere i punti limite, unita alla possibilità di porre un limite". "Il punto è ciò che stabilisce la continuità semplice". "Un angolo è generato dall'incontro di due figure continue in un punto finale della loro continuità". Qualunque cosa si possa obbiettare, definizioni di questo genere all'inizio del tredicesimo secolo sono piuttosto sorprendenti, perché ci dimostrano come la matematica infinitesimale con tutte le sue contraddizioni e difficoltà si andava preparando già presso gli scolastici. Giordano era infatti uno di essi, ed è fama che abbia insegnato all'università di Parigi.

La nostra meraviglia non è minore se ascoltiamo un francescano che pochi decenni dopo insegnava in Inghilterra, a Oxford. Intendiamo dire Tommaso da Bradvardina (Bredwardin), chiamato comunemente Bradvardinus, il quale appare nella schiera dei piú famosi dottori sotto il nome di *Doctor profundus*. Questi grandi dottori ci rammentano i sette savi della Grecia, e ne citiamo perciò alcuni che piú o meno hanno relazione col nostro argomento. Cosí Ruggero Bacone era il *Doctor mirabilis*, Tommaso d'Aquino il *Doctor angelicus* o *universalis*, Duns Scoto il *Doctor subtilis*, Raimondo Lullo il *Doctor illuminatus*, Guglielmo Occam il *Doctor invincibilis* o *singularis*.

Orbene il nostro *Doctor profundus*, arcivescovo di Canterbury, morto di peste nel 1349, compilò tra l'altro un lavoro sulla continuità, *Tractatus de continuo*, nel quale vi sono numerose proposizioni che si direbbero prese alla piú moderna teoria degli aggregati. Cosí distingue il continuo nel continuo fisso (*continuum permanens*), quale si manifesta nelle linee, nelle superfici e nei volumi, mentre il continuo progressivo (*continuum successivum*) si realizza col tempo o col movimento. Troviamo frasi di questo genere: "*Indivisibile*

est, quod nunquam dividi potest. Punctus est indivisibile situatum". Cioè, all'incirca: "L'indivisibile è ciò che non si può mai dividere. Il punto è l'indivisibile determinato dalla sua posizione". Inoltre: "L'indivisibile del tempo è l'istante". "Il movimento è il continuo successivo, misurato nel tempo". Il *Doctor profundus* esamina poi il problema del principio e della fine, e con ciò arriva necessariamente a considerazioni infinitesimali, che trovano il loro coronamento in antitesi incredibilmente acute. Distingue una infinità "catetica" e una "sincatetica". Una grandezza è catetica o semplicemente infinita quando non ha fine; viceversa l'infinità è sincatetica quando per ogni grandezza finita ve n'è un'altra maggiore, senza che questo aumento si arresti mai. Modernamente per indicare questa differenza si sono coniati i termini "transfinito" ed "infinito", specialmente nella dottrina degli aggregati dove le "potenze" degli aggregati infiniti vengono chiamate brevemente numeri cardinali transfiniti. Bradvardino spiega che il continuo non può consistere di un numero finito di grandezze indivisibili, e nemmeno di un numero infinito di indivisibili. Esso contiene semplicemente infiniti indivisibili in sé. Ogni continuo è composto di un numero infinito di elementi continui della stessa specie e possiede infiniti atomi identici. Perciò un segmento si compone di infiniti segmenti, un'area di infinite aree, un volume di infiniti volumi. Nella stessa posizione indivisibile non possono però trovarsi diversi indivisibili (punti in punti), che non è altro se non una espressione matematico-filosofica della legge dell'incompenetrabilità dei corpi.

Ogni matematico converrà che queste considerazioni, affini a quelle di Zenone e di Aristotele e forse derivate da questi filosofi, non sono vane dissertazioni scolastiche, come la pensano alcuni empirici. Anche un ingegnere che eserciti la sua professione talvolta non

può fare a meno di enunciare paradossi e verità nel campo infinitesimale, se non vuol correre il rischio che un ponte sospeso gli precipiti per non aver osservato le "sottigliezze scolastiche".

È una tragica legge nella storia della scienza che ci si serva volentieri di "spie in campo nemico", pur disprezzandole. Perché questa eterna rivalità tra il deduttivo e l'induttivo? Il periodo che segue ci mostrerà come entrambi resero possibile, con la loro collaborazione, i rapidi progressi realizzati nei secoli successivi dallo spirito "faustiano" dei popoli europei, che arrivò a dare al mondo la sua impronta in misura neppure lontanamente immaginata.

Con quel che precede abbiamo cercato di dimostrare che furono il commercio e la filosofia a far progredire la nuova matematica d'Occidente. Nell'animo dei popoli cristiani sorgeva però anche un'altra potente forza motrice, un'eredità venuta forse fino dall'India: il desiderio irrefrenabile di conoscere la natura, accoppiato con la volontà, pur ora manifestatasi, di dominarla e di sottometterla.

È universalmente noto che Aristotele, impropriamente detto "il filosofo", non solo ebbe grande influenza sul pensiero di tutti questi secoli dei quali ora parliamo, ma li coprí con la sua ombra. Questa influenza dello Stagirita non rimase però limitata alla logica e alla filosofia; la sua attività invase anche altri campi, non ultimo quello delle scienze naturali. Abbiamo già accennato al destarsi dell'appassionato desiderio di una piú profonda conoscenza della natura, desiderio che non doveva estinguersi neanche nei secoli successivi. Era perciò naturale che per appagare questo desiderio si cercassero lumi là dove si riteneva che fosse l'autorità massima e definitiva, come era il caso per Aristotele. Possiamo solo dire che qui ebbe grande importanza il concetto di forma e che sull'essenza di questi concetti si accese una vivace discussio-

ne tra francescani e domenicani, i cui maggiori esponenti erano Duns Scoto e Tommaso d'Aquino. Da tutte queste profonde analisi nacque in definitiva un significato della "forma" applicata allo studio della natura che noi potremmo tradurre approssimativamente come "fenomeno naturale misurabile". Come si doveva ora esprimere il grado, l' "*intensio*" di queste forme? A ciò dette risposta una nuova disciplina universitaria, che tratta della "lunghezza e larghezza delle forme" e che troviamo già alla fine del secolo decimoquarto nei programmi delle università di Colonia e di Vienna come materia obbligatoria per il conseguimento del baccalaureato.

Ci porterebbe di nuovo troppo lontano la dimostrazione se questo fosse un ritorno all'antica tradizione o già un risultato dell'insegnamento di Nicola d'Oresme, vissuto all'incirca dal 1323 al 1382. Fu prima allievo, poi insegnante e infine rettore del Collège de Navarre a Parigi. Morí vescovo di Lisieux. La sua opera porta il titolo *Tractatus de latitudinibus formarum* (trattato sulle grandezze delle forme) e suscita il nostro interesse al massimo grado, indipendentemente dal fatto che questo interesse vi fu anche da parte dei contemporanei, tra i quali il libro si diffuse rapidamente, prima trascritto a mano, poi, dopo l'invenzione della stampa, in quattro edizioni successive. Queste "grandezze" erano infatti nientemeno che le prime coordinate generali.

Torniamo alle nostre "forme". Una di esse era per esempio il calore, la cui variazione avviene nel tempo. Come si possono rappresentare e studiare gli aspetti di questa variazione, il "grado della larghezza", come lo chiama Oresme? Quale immagine generale fornisce infine questa progressiva variazione? A noi oggi la risposta appare semplice e intuitiva, poiché per esempio nel caso di un diagramma della febbre, porteremmo le unità di tempo a intervalli uguali su una linea

orizzontale, rappresentando le temperature relative a ciascuna unità di tempo come segmenti perpendicolari a questa linea orizzontale. Supporremmo anche un decorso "continuo" del fenomeno ed esprimeremmo questa finzione unendo tra di loro con una curva gli estremi delle "ordinate", cioè i diversi valori della temperatura.

In questo procedimento vi sono due cose da notare. Anzitutto la rappresentazione grafica dell'andamento di un fenomeno interpretabile quantitativamente. Inoltre la determinazione di una dipendenza, di una relazione tra tempo e grandezza misurata. Quando, come terza osservazione, si vede che tra l'istante della misura e il risultato non esiste solo la relazione formale che questa o quella temperatura appartiene a questa o a quella unità di tempo, ma si può stabilire che la variazione di temperatura dipende regolarmente dall'istante della misura (per esempio dal confronto delle curve giornaliere della febbre o dall'andamento di questa per tutta la durata della malattia), ci troviamo allora davanti a una funzione nel vero senso della parola. Una grandezza indipendente o scelta a piacere, come il tempo, si trova in relazione con una seconda, la temperatura, che ne dipende completamente ed univocamente. Con ciò la "curva" diventa molto piú della rappresentazione grafica di una variazione, essa diventa l'espressione di una legge. Dal punto di vista matematico rimane ancora un passo per determinare effettivamente questa legge, rimane cioè da fissare l'andamento della curva con un'espressione algebrica.

Vogliamo ora esaminare fino a che punto Nicola d'Oresme arrivò in questo processo mentale. È infatti opinione diffusa ancor oggi che Descartes abbia creato dal nulla il concetto di coordinate: l'indagine storica del secolo decimonono ha confutato questa leggenda, senza con ciò sminuire i meriti di Cartesio.

Nicola d'Oresme nel trattato già citato spiega "che

la grandezza dei fenomeni (*latitudines formarum*) è soggetta a molteplici variazioni e che questa molteplicità si può difficilmente discernere se lo studio di essa non si riconduce allo studio di figure geometriche". Questa dichiarazione, in relazione con quanto è stato detto sopra, è addirittura sorprendente, poiché contiene niente meno che la promessa di una rappresentazione grafica dei fenomeni naturali misurabili. Ora i due elementi da cui si genera la nostra visione si possono considerare in parte come "lunghezza" (*longitudo*), in parte come "larghezza" (*latitudo*). La lunghezza è una linea orizzontale, che corrisponde alla nostra ascissa, mentre la larghezza è l'ordinata relativa. La differenza tra due ordinate successive si chiama "grado della larghezza".

Che Oresme sia penetrato assai profondamente nell'argomento, lo si vede dal successivo sviluppo delle sue cognizioni. Si trova in lui una "mancanza di larghezza" e una "larghezza determinata", secondo che nel punto corrispondente l'ordinata è nulla o ha un valore definito. Vi è inoltre tutta una terminologia per le specie di variazione, per l'uniformità del fenomeno, per la costanza o la variazione della variabilità. Il suo "*excessus graduum*" è già una misura della variabilità. Quando l' "*excessus*" varia, i punti estremi delle ordinate non si trovano piú su una retta, ma su una curva. Per una tale variazione della variabilità Oresme dà perfino un esempio numerico, nel quale le "larghezze" variano come 0, 1, 2, 4, 7, 11, 16 ecc. Se aggiungiamo che col nome di "figura" Oresme intende il risultato che si ottiene riunendo in una sola immagine la lunghezza (il tratto di ascissa), le due ordinate estreme e il tratto di curva da esse compreso, avremo un buon concetto di questi inizî di una vera geometria basata sulle coordinate.

Oresme però è penetrato ancora piú addentro, per lo meno con l'intuizione, nei segreti che improvvisa-

mente cominciavano a rivelarsi col nuovo metodo. Se per esempio la "figura" è un semicerchio costruito sulla "lunghezza", appare evidente che le "larghezze" in corrispondenza dei punti dove il semicerchio comincia a salire o rispettivamente ritorna verso la "lunghezza" (asse delle ascisse), crescono e decrescono assai rapidamente. Questo aumentare o, come si potrebbe dire, il ritmo, il tempo dell'aumento, rallenta sempre piú finché nelle vicinanze del massimo della "larghezza", cioè nell' "intorno" del vertice della curva, scompare quasi del tutto.

In questa intuitiva osservazione compaiono per la prima volta il "problema della tangente" e il "quoziente differenziale". Cioè, riferendoci alla nostra precedente spiegazione, abbiamo un metodo di rappresentazione che considera l'andamento di un fenomeno sotto forma di curva, e concepisce questa curva come avviluppata da tangenti diversamente inclinate, di guisa che ogni punto è caratterizzato dall'inclinazione della tangente che passa per esso.

Come abbiamo detto, si rimase per secoli a questa intuizione preliminare. E anche la completa geometria delle coordinate di Descartes dovette unirsi ad altri elementi prima di poter diventare una vera geometria infinitesimale. In Oresme dobbiamo perciò illustrare il lato filosofico, piú che quello matematico, del problema. Prima però una breve parentesi. Ci accorgiamo che le espressioni "lunghezza" e "larghezza" vengono adoperate anche in geografia e in astronomia, quando s'indica la posizione di un punto della Terra (per esempio una città) o di una stella con la longitudine e la latitudine. Oresme ha certo preso a prestito le sue "*longitudines*" e "*latitudines*" da queste scienze, poiché già dal decimo secolo dopo Cristo si hanno rappresentazioni di traiettorie celesti, nelle quali si proietta prima su un piano la sfera cava del cielo e poi si riporta su questo piano la traiettoria (apparente) se-

condo latitudine e longitudine. Questa osservazione incidentale ci riconduce alla nostra questione base e ci permette di rendere giustizia al merito personale di Oresme. Vi è infatti una grande differenza tra la rappresentazione di una traiettoria sotto forma di curva e la rappresentazione dell'andamento delle variazioni di intensità di un fenomeno rispetto al tempo. Generalizzando questa seconda considerazione assai astratta, si arriva necessariamente al concetto di funzione. Tutto ciò che in qualche modo possiede una grandezza o grado, può ora essere riportato nella sua distribuzione spaziale o temporale sotto forma di "larghezze". Ad ogni variazione corrisponde subito una figura, una superficie limitata dalla curva e dalle sue coordinate e — con ulteriore generalizzazione — a ogni figura di questo genere corrisponde una variazione.

Con questa "*latitudo formarum*" è entrato qualcosa di rivoluzionario nella cultura occidentale, un concetto numerico essenzialmente nuovo, come dice Spengler, che chiama la funzione "numero faustiano". Non possiamo verificare qui una cosí enigmatica definizione, vedremo però ben presto che proprio la funzione racchiude in sé il ponte di passaggio tra la concezione eleatica del mondo e la concezione eraclitea. Il concetto di funzione è — si perdoni l'espressione — un commutatore che permette di passare in qualsiasi punto dall'essere al divenire e dal divenire all'essere. È un aiuto alla conoscenza, statico e dinamico in pari tempo, uno strumento adatto come niun altro mai allo studio della natura e delle sue leggi. Occorsero però diversi secoli prima di arrivare a penetrare queste importanti relazioni, anche se lo strumento in via di sviluppo venne a trovarsi nelle mani di un matematico come Oresme, che già adoperava esponenti frazionari e ne comprendeva il significato.

Venne ora quel movimento spirituale, al quale i popoli germanici parteciparono col brivido mistico del-

l'infinito e quelli latini con la robusta fantasia formale della rappresentazione analitica, movimento non ancora arrestatosi nel secolo successivo, il decimoquinto. Si ricollega degnamente ai grandi uomini appartenenti agli ordini religiosi il cardinale Nicolò da Cusa, il quale, nato a Cusa sulla riva della Mosella e figlio di un povero pescatore, portò il nome di Crypffs o Granchio e diventò uno degli spiriti piú rappresentativi del suo tempo. Quest'uomo di azione, giurista, teologo, ambasciatore a Bisanzio, statista, generale, legato al concilio di Basilea e altro ancora, si occupò anche di matematica a tempo perso, benché abbia fatto subito qualcosa di grande in tutti i campi ai quali si dedicò. A noi però le sue opere strettamente matematiche sembrano meno significative dei suoi studi sulle difficoltà e le manifestazioni del concetto d'infinito. In due opere assai ragguardevoli e assai oscure, ma certo piene di cose profonde, il *De docta ignorantia* e il *De Beryllo*, egli spiega il suo pensiero matematico-filosofico. *Docta ignorantia* è un titolo simbolico riflettente l'idea fondamentale del Cusano, cioè che l'unione degli opposti è il fondamento della conoscenza. Piú tardi chiama questo metodo anche l'"arte delle coincidenze", consistente nel trovare negli apparentemente contrari un superconcetto comune. Cosí per esempio il piú piccolo coincide col piú grande, perché in entrambi i casi non è possibile un proseguimento nella direzione segnata da ciascuno di essi. Cosí una retta infinita coincide col triangolo e col cerchio. Infatti un triangolo che ha un lato di grandezza infinita deve avere anche gli altri due lati infiniti, poiché questi due insieme devono essere maggiori del terzo lato. Ma l'infinito è già un limite e non vi è nulla di piú grande, allora in un triangolo con un lato infinito tutti e tre i lati devono cadere su una unica retta infinita o coincidere con essa. Lo stesso vale per un cerchio che diventi sempre piú grande, fino a non avere piú

curvatura come cerchio di grandezza infinita: anch'esso deve coincidere con la retta.

Anche il titolo della seconda opera *De Beryllo* è ugualmente simbolico. Da *Beryllo* in questo senso viene la parola tedesca "Brille" (occhiale), poiché si tratta infatti di una gemma concava o convessa che aiuta a vedere meglio. Se ora, dice Cusano, avessimo un berillo mentale che ci rivelasse del pari l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo, conosceremmo l'origine misteriosa di tutte le cose. In questo lavoro Cusano si occupa principalmente del continuo e dell'infinitamente piccolo in una maniera che in sostanza ci è già nota da Bradvardino in poi.

Per quanto interessante sia l'addentrarsi in cosí importanti e sottili argomenti, vogliamo osservare ancora solo questo, che Cusano, probabilmente per primo nella storia della matematica, indicò il cerchio chiaramente e genuinamente come "poligono con un numero infinito di lati" (*).

Certamente con queste affermazioni sono di nuovo venute al mondo tutte le difficoltà che già spinsero i greci fino dai tempi di Eudosso ad adottare le quantità grandi o piccole "a piacere" e alla dimostrazione per esaustione. Però la contraddizione e il suo superamento mediante la coincidenza forniscono punti di vista del tutto nuovi. E non possiamo trattenerci dall'aggiungere che proprio la piú moderna geometria, con i suoi punti e le sue rette all'infinito non si allontana affatto nella sua distanza dalla concezione di Cusano né tanto meno la contraddice. Noi stessi lavoriamo ancor oggi tranquillamente con cerchi infinitamente grandi, la cui curvatura è nulla, e con poligoni di infiniti lati che sono poi dei cerchi. È per-

(*) "*Quanto autem polygonia aequalium laterum plurium fuerit angulorum, tanto similior circulo; circulus enim si ad polygonias attendas est infinitorum angulorum*".

fettamente indifferente chiamare questo processo una finzione, con Vaihinger, o una coincidenza, con Cusano. Ed è anche indifferente che ad ogni occasione simile si parli subito della poca chiarezza e dell'indeterminazione del "passaggio al limite" — indifferente in senso piú elevato, poiché quando gli uni affermano che il poligono con numero di lati grandissimo si deve pur sempre rappresentare con una linea spezzata, diversa dalla linea essenzialmente e ininterrottamente curva di un cerchio, gli altri possono ribattere che forse all'infinito valgono leggi diverse che al finito e che una volta o l'altra il lato del poligono deve arrivare a coincidere con un punto della circonferenza.

In tutte queste considerazioni non si può evitare la differenza che passa tra l'infinito attuale e l'infinito potenziale e si urterà sempre nei concetti di continuo e di discreto e nell'antinomia tra divisibilità ed atomo. Infine si dovrà ammettere con Kant che il nostro intelletto è troppo lento per la prima interpretazione, troppo rapido per la seconda. Ma per quanto ciò sia importante, non è della massima importanza. Quel che piú conta è che, a quanto dimostra la storia della nostra scienza, il motto di Eraclito sul contrasto padre di ogni evento e il motto di Cusano sull'efficacia dell'unione degli opposti, hanno molto di vero.

Possiamo affermare, per concludere, che l'unione di queste due concezioni, tra loro contrastanti, della funzione — l'essere e il divenire — col concetto di coincidenza che è sempre in grado di trasformare il finito nell'infinito e l'infinito nel finito, fu l'esplosivo che con la violenza di un'eruzione cambiò la faccia alla nostra visione del mondo. Queste due creazioni, puramente occidentali e faustiane, e in particolare germanica l'una e francese l'altra, si affratellano ancora una volta, per arrivare al loro pieno sviluppo, con la

categoria magica e cabalistica dell'algoritmo, che è in ultima analisi un prodotto del pensiero indiano.

Il prossimo capitolo ci mostrerà come si effettuò l'ultimo attacco che doveva liberare di colpo la via alle piú alte cime raggiungibili.

IX

VIETA

Matematica e simbolismo

Se la matematica dell'ellenismo partí da un impulso interiore per arrivare poi a un punto morto, lo sviluppo della matematica moderna fu viceversa sollecitato molto dall'esterno. Non si vuol dire con questo che anche tra i moderni matematici d'Occidente non vi fossero dei pensatori e dei filosofi; il nuovo mondo però aveva tutt'altra mira che il perfezionamento di una scienza per se stessa. Per questo la matematica venne ininterrottamente richiamata ai "fatti" e le maggiori scoperte si verificarono sotto l'impulso di problemi venuti dall'esterno, problemi assai piú "reali" che per esempio quelli classici della duplicazione del cubo, della trisezione dell'angolo e della quadratura del circolo.

In questo periodo che intercorre tra Cusano e Descartes, cioè tra il quindicesimo e il diciassettesimo secolo, vi furono realtà rivoluzionarie in numero piú che sufficiente.

Tra tutti questi avvenimenti sceglieremo quelli che sono per noi della massima importanza. Nel 1453 con la conquista di Costantinopoli era caduta l'ultima sede delle antiche tradizioni e i dotti bizantini erano emigrati verso l'Occidente, non senza portare con sé gran copia di conoscenze classiche, comprese e non comprese. I grandi movimenti dell'Umanesimo e del Rinascimento ricevettero in tal modo una quantità enorme di materiale nuovo, e specialmente nel campo della matematica si entrò in possesso di molte opere del-

l'antichità che fino allora erano conosciute solo attraverso le traduzioni arabe o completamente ignorate. Non fu però solo questa circostanza esteriore, bensí tutto il contenuto spirituale del Rinascimento e dell'epoca successiva a provocare l'"assorbimento" della matematica antica. Esamineremo piú avanti come è avvenuto questo "assorbimento" che è a tutt'oggi in atto.

Vi sono ora da considerare per lo sviluppo e la diffusione della matematica due altri eventi che accelerarono potentemente tutto il movimento precedente: l'invenzione della stampa e la conoscenza della Terra mediante i viaggi di esplorazione di Colombo e dei suoi imitatori. Mentre la stampa dava un profondo impulso alla matematica e specialmente all'aritmetica con la pubblicazione, avvenuta nel 1494, dell'opera di Luca Paciuoli, nuovi problemi, molti dei quali essenzialmente matematici, venivano posti dalla nuova forma della Terra, dalla geografia in pieno sviluppo e abbracciante un campo sempre piú vasto, dall'arte di navigare e dall'astronomia con essa collegata. Tutto questo si intensificò naturalmente quando alla esplorazione della Terra seguí la conquista del cielo, e Copernico e Galileo crearono il nuovo sistema eliocentrico, che sostituí il sistema tolemaico fino allora ritenuto valido. Osserviamo che quest'ultima innovazione non si limitò a rivoluzionare il pensiero astronomico, ma indirizzò anche la fisica su nuove vie, le quali non solo ammettevano ma esigevano la trattazione matematica.

Dobbiamo qui avvertire nuovamente che non possiamo né vogliamo esaminare tutto quello che venne fatto di grande e di meritevole in questo tempo, poiché non si tratta che limitatamente di opere fondamentali e decisive. Quando vi furono, esse non si ricollegavano a singoli uomini, ma furono il risultato necessario dello sviluppo generale della scienza.

Questo periodo è caratterizzato anzitutto da uno studio diffuso dell'aritmetica e dell'algebra. I calcoli impiegati per scopi pratici e teorici costrinsero ad occuparsi sempre piú spiccatamente del lato algoritmico e meccanico di queste scienze, e non è azzardato dire che in questi secoli nacquero quasi tutti i simboli e i segni di operazione, per lo meno i piú semplici, coi quali oggi eseguiamo i nostri computi.

Prima però di rivolgerci a questo perfezionamento dell'aritmetica, osserviamo brevemente che due dei piú grandi artisti del Rinascimento crearono le prime basi di un ramo della geometria che venne poi ripreso e perfezionato solo alla fine del secolo decimottavo. Furono questi Leonardo da Vinci e Alberto Dürer, i quali nella loro qualità di uomini dotati di buona vista, ingegneri e architetti, eseguirono i primi studi di prospettiva geometrica e di geometria descrittiva.

Gli aritmetici da noi preannunziati furono il tedesco Michele Stifel, il francese Chuquet e l'illustre quartetto italiano: Ferro, Cardano, Tartaglia e Ferrari. Veri artisti dell'aritmetica e pedagoghi furono Adamo Riese, divenuto proverbiale, e Rudolff.

Anche se Stifel e Chuquet poterono vantare una grande produzione autonoma, anche se entrambi nel confronto tra una serie aritmetica e una geometrica toccarono per cosí dire la prima nota nella scala dell'indagine logaritmica, spetta tuttavia agli italiani qualcosa di molto piú importante. Furono loro infatti che fecero il primo progresso decisivo rispetto alla matematica antica, risolvendo l'equazione di terzo grado con estrazioni di radice.

Parlando al plurale abbiamo i nostri motivi. La scoperta effettiva dev'essere stata fatta da Ferro, che ci è, a parte ciò, sconosciuto. Tutto il resto è avvolto nella nebbia di una contesa per la priorità di cui non si conosce l'eguale nella storia della scienza. Le sin-

gole fasi di questa contesa assomigliano a novelle del Boccaccio o alle memorie di qualche avventuriero del Settecento. Pullulano i libelli, i fogli volanti, le ingiurie, i licenziamenti, i contratti, le sfide. La verità non si poté mai sapere, però le piú recenti indagini tendono ad attribuire a Cardano, malgrado tutti i suoi spergiuri, il merito maggiore, e a Tartaglia, per quanto geniale, il merito minore. Cosí anche la formula risolutiva delle equazioni cubiche viene oggi generalmente indicata col nome di formula di Cardano, il che storicamente non è esatto, anche prescindendo dalla questione della priorità e dalla incertezza sulla realtà dei fatti. Questa formula, per quanto derivi necessariamente dalle soluzioni date da Cardano, appartiene a un altro illustre aritmetico, il Bombelli. La risoluzione dell'equazione cubica e quella, ottenuta poco dopo, dell'equazione biquadratica, cioè dell'equazione in cui l'incognita si presenta alla quarta potenza come potenza di esponente massimo, rappresenta una scoperta importante non solo di per sé, ma perché la ricerca delle soluzioni diede occasione a percorrere certe vie che, generalizzate e analizzate piú tardi, resero possibile tutto quanto l'algebra moderna e la moderna teoria degli integrali sono in grado di dare. Si tratta della cosiddetta "sostituzione" di espressioni algebriche con altre piú semplici o piú complicate secondo i casi. Chiunque è appena un po' esperto dell'algebra sa che si può per esempio risolvere l'equazione di sesto grado $x^6 + 5x^3 - 14 = 0$, altrimenti inattaccabile, sostituendo x^3 con una nuova incognita u e lavorando con l'equazione $u^2 + 5u - 14 = 0$, la cui soluzione è notoriamente $\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 14}$, da cui $u_1 = 2$ e $u_2 = -7$. Si è perciò "ridotta" l'equazione di sesto grado a una quadratica mista. Ritornando ora alle equazioni cubiche pure $u_1 = x_1^3$ e $u_2 = x_2^3$, si trovano i valori di

x pari a $\sqrt[3]{u_1}$ e $\sqrt[3]{u_2}$, cioè $\sqrt[3]{2}$, e $\sqrt[3]{-7}$, il che porta ad altre considerazioni.

Tali artifizi erano già ben conosciuti dagli antichi, per esempio da Diofanto. L'epoca di Cardano non ha perciò inventato la sostituzione, ma noi non vogliamo mancare l'occasione di mostrare con la cosiddetta soluzione cardanica una intera serie di sostituzioni, perché vogliamo riallacciare a questi artifizi di calcolo alcune osservazioni di ordine generale. Ci limitiamo alle equazioni cubiche miste e riportiamo tutte le nostre considerazioni in notazione moderna, ai tempi di Cardano non ancora esistente. Si usava infatti allora prevalentemente l'algebra "in parole" con poche abbreviazioni. Noi diciamo dunque nel nostro linguaggio attuale che ogni equazione cubica mista deve potersi ricondurre alla forma $x^3+ax^2+bx+c=0$, dove a, b, c, sono numeri concreti o generali, come coefficienti, costanti, ecc. Questa forma, come abbiamo già detto, aveva sfidato fino allora tutti i tentativi di risoluzione, principalmente a causa del termine quadratico ax^2, come presto si constatò. Per eliminare questa difficoltà, Cardano (prescindendo d'ora in poi dalla questione della priorità) sostituì al posto di x il valore $y-\frac{a}{3}$. L'equazione diventa perciò:

$$y^3-3y^2\frac{a}{3}+3y\frac{a^2}{9}-\frac{a^3}{27}+ay^2-\frac{2a^2y}{3}+\frac{a^3}{9}+yb-\frac{ab}{3}+c=0,$$

e, dopo eseguite le operazioni, $y^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)y+$ $+\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)=0$, cioè un'equazione che contiene solo la terza e la prima potenza dell'incognita. Quest'equazione ha la forma generale $x_1^3+px_1+q=0$, dove p e q sono formati solo dalle costanti a, b e c. Si sostituisce perciò p al posto di $\left(b-\frac{a^2}{3}\right)$ e q al posto di $\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)$.

A questo punto, Cardano esegue una nuova sostituzione che è apparentemente priva di senso e porta ad altre complicazioni, introducendo al posto dell'incognita x_1 due incognite ausiliarie u e v. Se $u + v = x_1$, l'equazione $x_1^3 + px_1 + q = 0$ diventa $u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0$, ossia, ordinata, $u^3 + v^3 + q + (u + v) \cdot (3uv + p) = 0$. Poiché si può senz'altro supporre che $(3uv + p)$ abbia valore nullo, anche $u^3 + v^3 + q$ diventa subito nullo. Possediamo allora due equazioni con due incognite. Se, come abbiamo detto, dev'essere $(3uv + p) = 0$, sarà $3uv = -p$, ossia $v = -\frac{p}{3u}$. Introducendo questo valore nella seconda equazione $u^3 + v^3 + q = 0$, si ha però $u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0$ ossia, moltiplicando e dividendo per $27u^3$, si ottiene la forma $u^6 + u^3q - \frac{p^3}{27} = 0$. Siamo così davanti a un'equazione di sesto grado, che si può ricondurre a un'equazione quadratica mista, poiché contiene l'incognita solo alla potenza $2n$ ed n. Dobbiamo fare adesso un'altra sostituzione e porre p. e. r al posto di u^3; eseguiamo però questa sostituzione solo mentalmente e calcoliamo direttamente la u^3 come $-\frac{q}{2} \pm \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$, da cui $v^3 = -q - u^3 = -q + \frac{q}{2} \pm \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$, uguale infine a $-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$. Ora non dobbiamo fare altro che ritornare sui nostri passi. Avevamo infatti premesso che fosse $x_1 = u + v$, per conseguenza $x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} +$

$+\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$. Dobbiamo aggiungere che né in Cardano né in Bombelli si trovano i segni di addizione e sottrazione nel modo dato da noi, specialmente i segni prima delle radici quadrate; anche Bombelli pone infatti nella prima espressione solo il $+$ e nella seconda solo il $-$. Questa cosiddetta "radice polinomia" di x_1 dev'essere sviluppata tenendo conto delle sostituzioni di p e di q e infine della relazione $x = x_1 - \frac{a}{3}$. Osserviamo ancora che già Cardano e i suoi immediati successori si preoccuparono del fatto che il polinomio sotto radicale diventasse immaginario e per evitare questa "impossibilità" escogitarono nuove sostituzioni di ogni genere. Cardano urtò del pari contro il risultato affatto imprevisto che una ed una sola equazione potesse dare tre soluzioni diverse. Sapeva inoltre che le sue sostituzioni non sempre conducevano alla mèta, e che vi erano anche dei casi "irriducibili".

In linea di principio si era però riconosciuto per la prima volta che l'equazione cubica era risolubile con trasformazioni puramente algebriche ed estrazioni di radice, e nulla cambiava in ciò se qualcuno, specie dopo Girard e l'introduzione dei logaritmi, preferiva per facilità di calcolo le soluzioni trigonometriche, soluzioni che in qualche modo risalivano al problema della trisezione dell'angolo.

Quello però che, al di sopra di tali questioni particolari, preoccupò sempre piú i matematici da questo tempo in poi, fu il problema della sostituzione in sé. Come, quando e perché si potevano senz'altro sostituire le espressioni algebriche con altre piú semplici o piú complicate? Che cosa rimane uguale, che cosa varia in questo processo? Si vide presto chiaramente che vi era una questione di forma e una questione di

similitudine. Non era ancora possibile afferrare in questo stadio il concetto completo dell'invarianza, poiché l'idea di trasformazione sorse chiaramente solo dalla geometria analitica e dall'analisi infinitesimale. Ma di questo dovremo occuparci ancora parlando dell'algebra nel secolo decimonono; per il momento accontentiamoci di aver preso conoscenza del problema in tutta la sua gravità ed importanza mediante l'esempio dell'equazione cubica. La mente umana era venuta in possesso di un nuovo strumento magico, e non ebbe pace finché non lo perfezionò e non lo sfruttò al massimo.

Questo grande passo innanzi fu fatto da Vieta, cultore geniale dell'aritmetica e dell'algebra, che noi consideriamo come algebrista, poiché la sua opera veramente fondamentale si svolse in quest'ultimo campo. Strano a dirsi, Vieta non era matematico di professione, ma giurista e avvocato, occupò impieghi statali d'ogni genere e tra l'altro decifrò un codice segreto spagnolo di circa 500 segni. Con questo fu possibile ai francesi di leggere comodamente tutti i dispacci cifrati degli spagnoli coi quali erano in guerra. Vieta in origine era ugonotto, ma deve aver cambiato la sua fede piú volte, cosa che non gl'impedí di rimanere sempre un protetto del cardinale di Rohan. Arrivò a diventare consigliere privato del re di Francia, lasciò 20.000 talleri, fece stampare tutti i suoi libri a proprie spese, li regalò da ogni parte ad amici e oppositori, e fu in generale d'indole assai mite. Cosí mantenne a proprie spese in casa sua per parecchi mesi uno dei suoi avversari scientifici e gli pagò perfino il viaggio di ritorno.

L'umanità gli deve però, oltre tutti questi tratti simpatici, qualcosa di veramente originale. Fu infatti Vieta ad elevare l'algebra al terzo stadio, lo stadio esclusivamente simbolico. Nella sua *Introduzione all'arte analitica* (*In artem analyticam isagoge*) del 1571, enuncia anzitutto ben chiaramente il principio di omogeneità, che

rimase sempre inespresso nei matematici greci del periodo classico e fu solo usato, però non sotto forma generale, da Erone e Diofanto. Questo principio dice in breve che solo grandezze della stessa specie sono paragonabili, e che non è ammissibile porre in relazione tra di loro segmenti, superfici e volumi. Vieta lo adotta con rigore logico nel suo calcolo letterale. Come abbiamo detto, abbandonò la rappresentazione in parole dell'algebra, e adoperò per i calcoli le lettere latine maiuscole. Le vocali simboleggiano grandezze incognite, le consonanti grandezze note. Occorre fare attenzione alla parola "grandezza". Anche presso Vieta l'algebra non è ancora penetrata univocamente nel regno dei numeri. Alle sue lettere viene assegnato piuttosto il concetto di "grandezza" in senso geometrico. Vieta calcola con esse "*per species seu rerum formas*", cioè all'incirca "per segni simbolici ossia immagini delle cose". A questa interpretazione si attiene, benché non si ritenga legato dal concetto dimensionale della geometria e prosegua tranquillamente nei suoi calcoli fino alla nona potenza. È difficile immaginare che cosa pensasse di questa evidente incongruenza una mente matematica di prim'ordine come quella di Vieta. Aveva forse l'intuizione di una geometria pluridimensionale? Oppure gli bastava il principio di omogeneità, che proibiva di porre in relazione tra loro grandezze di specie diversa anche oltre la terza dimensione? O anche considerava forse le potenze superiori delle sue grandezze letterali non come dimensioni spaziali superiori, dal momento che, come abbiamo visto in Cardano, erano riducibili mediante sostituzioni alle tre dimensioni naturali? Sono questioni assai difficili da risolvere, tanto difficili come la questione se un geometra contemporaneo possa concepire come realmente esistente una geometria superiore alla tridimensionale. Nella storia della matematica consapevolmente o inconsapevolmente si è spostato di continuo il contenuto

razionale o intuitivo delle forme matematiche dall'aspetto aritmetico a quello geometrico e viceversa. Per gli elleni e per tutti i loro discepoli la pura algebra è un regno di ombre senza sostanza, viceversa per i matematici moderni la geometria diventa appena uno degli innumerevoli campi di applicazione di una scienza assai piú elevata, la scienza dei "gruppi", delle "similitudini", "forme", "pluralità" e "invarianze strutturali".

Ma non vogliamo correr troppo. Vieta in ogni caso separò rigidamente il calcolo concreto numerico o "*logistica numerosa*", dal calcolo letterale o "*logistica speciosa*", benché abbia senz'altro trasferito al calcolo letterale, dove tornava opportuno, il lato meccanico e algoritmico del calcolo aritmetico. L'invenzione germanica dei segni "piú" e "meno" si vede già dappertutto nei suoi lavori, mentre gli altri simboli di collegamento della scrittura moderna mancano ancora o sono espressi con segni diversi dagli odierni. Vieta adopera la linea di frazione nel senso nostro e ha anche segni di radice propri, né gli sono ignote le parentesi tonde e quadre per espressioni di piú membri.

Possiamo perciò affermare con sicurezza che Vieta per primo ridusse a "formule" nel vero senso della parola intere espressioni matematiche e le unì con simboli di operazione. Rimangono, è vero, alcune scorie, come l'indicazione della potenza mediante parole, tuttavia il nuovo sistema sfavilla sotto queste scorie cosí chiaro ed evidente che la "stenografia della matematica" o meglio l'"esperanto della matematica", cioè la scrittura puramente concettuale e simbolica, in meno di centocinquant'anni dopo Vieta aveva quasi raggiunto la sua forma attuale. Il nostro metodo moderno di scrivere le grandezze algebriche in lettere corsive minuscole dell'alfabeto latino venne introdotto da Tommaso Harriot (1560-1621), professore a Oxford, il quale lo diffuse nella sua *Artis analyticae praxis*, cioè "Prassi

dell'arte analitica", probabilmente sotto l'influenza di Lord Napier.

Dal nostro punto di vista ci sarebbe ancora da dire su Vieta che la parola "coefficiente" deriva dal suo vocabolario, e compare in un problema geometrico, sotto la forma "*longitudo coëfficiens*, cioè "lunghezza o segmento cooperante". Perciò per Vieta, coefficiente significa un segmento che contribuisce alla formazione della grandezza. Se prendiamo per esempio il caso di dover "applicare" a un quadrato di lato $(A + B)$ un rettangolo, uno dei cui lati sia ancora $A + B$, mentre l'altro ha il valore D, allora la superficie della nuova figura è $(A + B)^2 + D\,(A + B)$. Perciò in questo caso D è il "coefficiente" del segmento $(A + B)$. In conformità al suo principio di omogeneità Vieta immagina che il quadrato $(A + B)^2$ diventi addizionabile solo quando anche $(A + B)$ ha acquistato, mediante il coefficiente D, la dimensione di una superficie. Altrimenti si sommerebbe una superficie con una linea, il che non è permesso.

Non parleremo di tutte le altre elevate doti matematiche di Vieta. Accenneremo solo brevemente che tutta una scuola di aritmetici e di algebristi era al lavoro per far progredire l'"*ars magna*", la grande arte, come già l'aveva chiamata Cardano. Fin dai tempi di Raimondo Lullo (XIII secolo d. C.) non si era mai perduto di mira l'ideale di una scienza universale, di un metodo capace quasi di meccanizzare il pensiero. Quest'attività per metà mistica che arriva a designare l'algebra col nome di "*Artium ars*", l'arte delle arti, ebbe impulso anche in Germania e in Austria per opera di uomini come Regiomontano e Peuerbach e in generale dalla scuola dei "cossisti". Questa parola ha lo stesso significato di algebristi, e deriva dall'italiano causa o cosa, e del resto la denominazione di "cosa" per la grandezza incognita risale ai matematici indiani.

X

JOST BÜRGI

La matematica tabellare

Il nostro tappeto magico ci porta di continuo avanti e indietro, tanto da farci perdere il filo. Dobbiamo perciò riprendere la nostra esposizione seguendo una via ben determinata, se vogliamo portare alla ribalta un nuovo problema che rappresenta di per sé un'epoca nella storia della matematica. Ce ne occuperemo da vicino anche per un'altra ragione, poiché al riguardo troviamo inesattezze in parte involontarie, o per lo meno una certa superficialità, in quasi tutti i libri di matematica, anche i piú precisi. Intendiamo parlare dei logaritmi, terrore di tanti studenti.

Sarebbe stato assai naturale scoprire i logaritmi per via sistematica. In base a un'analisi approfondita di tutte le operazioni aritmetiche si sarebbe dovuto dire che erano ancora possibili altre operazioni fondamentali. Come all'operazione che unisce ("tetica") dell'addizione si contrappone quella inversa che disgiunge ("litica") della sottrazione, cosí alla moltiplicazione corrisponde la divisione, all'elevazione a potenza l'estrazione di radice. Si può ora concepire un altro problema, e cioè potrebbe esser nota la base di una potenza e incognito l'esponente, ossia un'espressione della forma a_x, dove a è una grandezza concreta come 10, 500, 7324, o un altro numero qualsiasi. Se ora $a_x = b$, dove anche b è noto, si deve riconoscere che qui si tratta di una operazione costruttiva o tetica, di una specie di elevazione a potenza, nella quale questa volta l'incognita non è la base a, ma l'esponente x. Questa doppia

possibilità deriva anche dalla non validità della proprietà commutativa dell'elevazione a potenza. Nell'addizione e nella moltiplicazione è indifferente scrivere $x + a = b$, o $a + x = b$; e $a \cdot x = b$, oppure $x \cdot a = b$. Non così nelle potenze dove $x^a = b$ ha un significato enormemente diverso da $a^x = b$. La prima espressione si chiama oggi elevazione a potenza, la seconda funzione esponenziale. L'inverso di $x^a = b$, è l'operazione litic adell'estrazione di radice, cioè $x = \sqrt[a]{b}$. Qual è però l'operazione inversa di $a^x = b$? Se io pongo $a = \sqrt[x]{b}$ non vado avanti di un passo, perché adesso si presenta la domanda come calcolare la x.

Torneremo presto sull'argomento. Fermiamoci per ora a questa domanda, poiché l'effettivo sviluppo storico prese un altro corso, fino a quando non si poté contemplare il problema in tutta la sua generalità. E proprio questo modo tortuoso di avvicinarsi al nocciolo della questione è estremamente interessante dal punto di vista della storia di una scoperta. La realtà, anche in matematica, sceglie spesso la via di Colombo; il quale non disse certo partendo: "Io vado a scoprire l'America", poiché non pensava neppure lontanamente a un continente sconosciuto, ma voleva solo abbreviare la via delle Indie. La scoperta dei logaritmi avvenne press'a poco nello stesso modo.

Le prime tracce di questo mistero risalgono ad Archimede, e derivano dal confronto tra le serie aritmetiche e le serie geometriche. La relazione si vede chiaramente in Michele Stifel e in Chuquet, matematico altrettanto geniale quanto Stifel. Nell'*Aritmetica integra* di Stifel si trova il confronto sopra accennato sotto la forma:

$$\ldots -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \ldots$$

$$\ldots \frac{1}{32} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \qquad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 64 \quad 128 \quad 256 \quad 512 \ldots$$

Stifel osserva: "Si potrebbe scrivere un nuovo libro

completo sulle meravigliose proprietà di questi numeri, ma a questo punto devo fermarmi, e passare oltre a occhi chiusi". In un altro punto apre viceversa un po' gli occhi e, osserva: "L'addizione nella serie aritmetica corrisponde alla moltiplicazione in quella geometrica; del pari la sottrazione nella prima corrisponde alla divisione nella seconda. La semplice moltiplicazione nella serie aritmetica diventa moltiplicazione in sé (elevazione a potenza) nella serie geometrica. La divisione nella serie aritmetica ha con l'estrazione di radice nella serie geometrica, lo stesso rapporto che ha per esempio la divisione per due con l'estrazione di radice quadrata".

Con questo già nel 1544 era stato espresso pienamente e chiaramente il principio su cui si basano i logaritmi, la possibilità cioè di abbassare di un grado le prime sei operazioni aritmetiche. Per maggiore chiarezza illustreremo la seconda affermazione di Stifel con la serie costruita da lui stesso. Si debba eseguire per esempio il prodotto 8 . 64, basta allora sommare i numeri della serie aritmetica che nella tabella stanno sopra i numeri dati cioè 3 e 6. Si ottiene 9, e sotto questo 9 sta il risultato della moltiplicazione, 512, nella riga della serie geometrica. Naturalmente si possono prendere anche piú di due fattori, come $\frac{1}{16}, \frac{1}{2}$, 2 e 256.

La somma dei corrispondenti numeri della serie aritmetica dà $(-4) + (-1) + 1 + 8 = 4$, e si può leggere subito il risultato, che è 16, sotto il 4. Nel caso della divisione si deve invece sottrarre. Cosí per esempio 256:32 equivale a $8 - 5 = 3$ e come quoziente si ha il numero 8 sotto il 3. L'elevazione a potenza, che si può anche concepire come moltiplicazione ripetuta "in sé", come dice Stifel, avviene nelle nostre serie mediante addizione ripetuta "in sé" dei membri della serie aritmetica o, ciò che è lo stesso, mediante

moltiplicazione. Così per esempio, 8^3 si trova sommando $3 + 3 + 3 = 9$, sotto cui sta il numero 512, o più semplicemente moltiplicando $3 \cdot 3$, che dà lo stesso risultato. L'estrazione di radice si effettua mediante la divisione. Per esempio, la radice quarta di 356 si ottiene ponendo $8:4 = 2$, da cui si ottiene 4 come valore della radice cercata.

Questo giochetto non acquista nulla di particolarmente misterioso, se scriviamo le nostre serie algebricamente:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} \ldots & - & 5 & - & 4 & - & 3 & - & 2 & - & 1 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots \\ \ldots & & q^{-5} & & q^{-4} & & q^{-3} & & q^{-2} & & q^{-1} & & q^0 & q^1 & q^2 & q^3 & q^4 & q^5 & q^6 & q^7 & q^8 & q^9 & \ldots \end{array}$$

Si vede subito che la serie aritmetica null'altro è se non la successione degli esponenti e che nel calcolo concreto non si è fatto altro che eseguire operazioni aritmetiche con potenze. Infatti $q^5 \cdot q^{-2} = q^{5-2} = q^3$, oppure $q^3 q^4 = q^{3+4} = q^7$, $q^8 : q^2 = q^{8-2} = q^6$, $(q^3)^2 = q^{3 \cdot 2} = q^6$ e infine $\sqrt{q^8} = (q^8)^{\frac{1}{4}} = q^{8:4} = q^2$ ecc. Perciò anche oggi la relazione $a^m \cdot a^n \cdot a^r \cdot \ldots = a^{m+n+r} \ldots$ viene chiamata impropriamente "proprietà logaritmica", poi ché da questa prima proprietà si possono derivare tutte le altre. Non si arrivò tuttavia subito a questa generalizzazione principalmente a causa dell'imperfezione della scrittura algebrica. I risultati raggiunti da Stifel vennero ripresi dagli algebristi successivi, specialmente da Simone Jocob e arrivarono così a conoscenza di Jost Bürgi, matematico geniale quanto testa limitata e balzana. Ma quasi contemporaneamente sorse la stessa idea nella mente di uno scozzese, Lord John Napier, signore di Merchison, o, alla latina, Neperus. La scoperta dei logaritmi è perciò un esempio tipico di contemporaneità, che avrebbe dovuto far riflettere i posteri, i quali spesso in casi analoghi, senza prove sicure, scatenarono polemiche sulla priorità di certe invenzioni, con danno della scienza e dei contendenti stessi. Sia detto di passaggio, sulla priorità della scoperta dei logaritmi

non vi fu discussione; però i posteri, fino ai piú moderni testi scolastici, hanno confuso e deformato l'essenza di questa scoperta e la parte che Napier e Bürgi vi ebbero.

Cominciamo perciò sistematicamente col problema generale che si presentava tra la fine del sedicesimo e l'inizio del diciassettesimo secolo. Abbiamo già osservato che specialmente i popoli germanici avevano sviluppato e perfezionato l'aspetto puramente aritmetico della matematica. Ora avvenne che, malgrado l'introduzione del calcolo aritmetico algoritmico, malgrado le indagini approfondite sull'essenza di questi calcoli e metodi di calcolo, i computi di cui si aveva bisogno diventavano sempre piú lunghi e complessi. Ricordiamo solo, a titolo d'esempio, Ludolfo van Ceulen, il quale nel 1509 riuscí notoriamente a calcolare il numero π ricavandolo da un poligono di 1.073.741.284 lati, fino alla 35ª cifra decimale, cioè

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288...$$

arrivando cosí molto piú in là di Archimede.

L'astronomia, l'astrologia e la trigonometria, oltre a una piú estesa contabilità statale e commerciale, portarono il loro contributo al bisogno di una semplificazione dei calcoli e di una maggiore esattezza. E a tale scopo Stifel e Jacob, come già sappiamo, e altri ancora, avevano additato la miniera che si nascondeva sotto le serie aritmetiche e geometriche. Tutto ciò venne intensificato dalla graduale introduzione nell'aritmetica della scrittura decimale delle frazioni e dalla presenza di raccolte di tabelle per facilitare la moltiplicazione e la divisione. Per questi motivi, e questi soli, Napier e Bürgi si misero al lavoro, non appena i tempi furono maturi. Sappiamo oggi, o meglio dovremmo sapere, che Bürgi arrivò per primo al possesso del nuovo strumento; però non vi dette pubblicità, probabilmente per mancanza di tempo, cosicché il grande Keplero gli rimproverò "di aver lasciato in asso il figlio della sua

mente, anziché educarlo per la fama", e ciò perché era un "*cunctator*", un temporeggiatore, e "*secretorum suorum custos*", geloso dei propri segreti.

Come fece dunque Bürgi a ottenere le sue *Tavole progressive*, che con i loro numeri neri e rossi rappresentavano qualche cosa di simile alle nostre tavole logaritmiche? Semplicemente considerando le due serie (*) di Stifel e meditando sulle sue parole. Da buon matematico vi riconobbe due cose. In primo luogo che queste serie potevano essere valorizzate praticamente solo se si fossero potuti avvicinare al massimo i termini. Infatti nelle serie geometriche come 1, 2, 4, 8, 16, ecc. gl'intervalli tra i singoli numeri diventano sempre piú grandi e non sarebbe possibile per esempio eseguire il prodotto 25 . 37, senza parlare delle lacune che intercorrono tra i termini superiori, come per esempio tra 1024 e 2048, o tra 2048 e 4096. In secondo luogo Bürgi vide, cosa nota anche ai suoi predecessori, che la proprietà logaritmica non si limitava alla serie delle potenze di base 2, ma si estendeva a tutte le serie di ragione q a piacere, come abbiamo già visto anche noi, in via del tutto generale. Erano però indispensabili certe condizioni. Cosí la serie aritmetica doveva cominciare con zero e quella geometrica con 1 perché sussistesse la proprietà logaritmica. Il rapporto di formazione doveva anche essere quanto piú piccolo possibile, in modo che i termini della serie fossero vicini l'uno all'altro, condizione necessaria perché nelle due serie si potesse trovare praticamente qualunque numero. Per spiegare come ciò viene inteso, abbiamo preparata una progressione nella quale

(*) In linguaggio moderno non sono "serie" ma "progressioni". Noi parliamo qui di serie, perché allora e anche piú tardi vennero cosí chiamate. Per la serie, come per la progressione, è caratteristica la cosiddetta "legge di formazione" secondo la quale sono costruite. Mentre però nella progressione i termini stanno solo uno accanto all'altro, non collegati da alcun segno, nella serie viceversa vengono sommati.

ogni termine vale $1 \frac{1}{100}$ volte il precedente. Per semplicità abbiamo poi moltiplicata tutta la progressione per un milione, per non dover scrivere cifre decimali. Otteniamo cosí:

0	1	2	3
1.000.000	1.010.000	1.020.100	1.030.301
4	5	6	7
1.040.604	1.051.010	1.061.520	1.072.135
8		9....	
1.082.857		1.093.685.....	

Chiunque può convincersi che per questa progressione vale la proprietà logaritmica, se si tiene giusto conto dei valori di posizione. Jost Bürgi nelle sue tabelle procedette per intervalli ancora piú piccoli, che noi potremmo quasi chiamare microscopici, e ciò in doppio modo. Moltiplicò contemporaneamente la serie aritmetica per 10 e accrebbe ogni termine della serie geometrica di $1 + \frac{1}{10^4}$, cioè di $\frac{1}{10.000}$, ottenendo per 0 il valore 100.000.000 e per 10, 100.010.000. I numeri tra 1 e 10 devono essere inseriti proporzionalmente, ammettendo in via approssimata che l'aumento della serie geometrica abbia un andamento proporzionale a quello della serie aritmetica dentro quell'intervallo. Bürgi chiama ora i termini della serie aritmetica "numeri rossi" perché sono scritti in rosso nella tabella. Gli altri numeri si chiamano "numeri neri". Noi oggi chiamiamo i numeri rossi "logaritmi" e i neri semplicemente "numeri".

Benché con le tavole di Bürgi si possa calcolare assai bene secondo un sistema logaritmico, queste tavole non sono ancora logaritmi nel vero senso della parola come li intendiamo noi, poiché Bürgi non si preoccupa in nessun modo della base del sistema, anzi talvolta fa

degli arrotondamenti per motivi puramente esteriori. Bisogna ancora aggiungere che oggi si afferma quasi dappertutto che Napier è stato l'inventore dei "logaritmi naturali" di base $e = 2{,}718281828459...$ Questo è assolutamente errato, come vedremo subito. Se ci fu un matematico che inconsapevolmente si avvicinò a questa base, fu proprio Bürgi, poiché la sua base che egli stesso, come abbiamo detto, non conosceva, ha il valore $\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10} = 2{,}7184593$, non molto diverso dal valore esatto di e, che è $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Per ottenere questo valore la serie rossa di Bürgi dev'essere però divisa ancora per 100.000.

Lord Napier partí dalle esigenze della pratica piú di quanto avesse fatto Bürgi. Non possiamo addentrarci nel complicato metodo di calcolo della sua *Mirifici Logarithmorum canonis constructio*, apparsa a Edimburgo nel 1619; diciamo solo questo, che la sua tavola dei "meravigliosi logaritmi" non dava i logaritmi della serie dei numeri naturali, ma dei seni degli angoli, era cioè un'antenata delle nostre tavole trigonometriche logaritmiche. Per altro Napier, come Bürgi, lavora con due serie, che in questo caso procedono in senso contrario. Non parla neanche lui di una base, né tanto meno di un "logaritmo naturale". La sua base risulta approssimativamente $\frac{1}{e}\left(1 - \frac{1}{3}\,10^{-14}\right)$, è perciò lievemente minore del valore reciproco della base dei logaritmi naturali. È certo però che i logaritmi neperiani furono i primi ad apparire stampati come tali, sotto forma di tavola utilizzabile per puri calcoli numerici, e che Napier è l'inventore della parola "logaritmo". La loro generazione veniva da lui concepita come movimento sincrono, come "scorrimento" (*fluxio*) di due serie, cioè dinamicamente, da cui conseguiva una coordinazione puntiforme delle due serie per produrre le

note relazioni. In questa "*fluxio*" che forse ha origine in Clavio, troviamo in ogni caso un'antenata delle concezioni infinitesimali di Newton. Infine si deve anche dire che già Napier consigliava il 10 come base di un sistema di logaritmi, idea che venne subito ripresa dal suo amico professore di Oxford Enrico Briggs. È noto a tutti che oggi facciamo i nostri calcoli prevalentemente con questi logaritmi di Briggs, la cui base, come abbiamo detto, è il numero fondamentale del nostro sistema numerale, il 10^1. Scegliendo questo numero come base si ha una gran quantità di vantaggi, come per esempio la separazione dei logaritmi in "caratteristica" e "mantissa" (*). Ogni logaritmo di Briggs consiste perciò di una parte intera, che dà il valore di posizione del numero corrispondente e di una parte decimale, la "mantissa", che indica il valore numerico. Per esempio, $3{,}845\,10$ è il logaritmo (in base 10) di 7000, mentre $0{,}845\,10$ è il logaritmo di 7 e $0{,}845\,10 - 3$ rappresenta il logaritmo di 0,007.

Con queste scoperte fatte all'inizio del secolo decimosettimo si rese possibile un gran passo avanti nei calcoli, la riduzione del grado dell'operazione o piú ancora elevazioni a potenza ed estrazioni di radice, alle quali fino allora non era neanche possibile pensare. Chi avrebbe potuto calcolare per esempio $7{,}534^{27{,}19843}$ oppure $375{,}722^{\frac{1}{\pi}}$? Coi logaritmi, simili problemi, necessari anche per la risoluzione delle equazioni, diventano in paragone un giochetto algoritmico. Anche se le tabelle subiscono continui perfezionamenti, anche se le piú profonde relazioni tra la funzione esponenziale $a^x = b$ e la reciproca $x = \log_a b$, cioè logaritmo di b in base a, furono rivelate solo dal grande Eulero nel secolo decimottavo, l'essenziale era stato già messo in moto fin dall'inizio. L'algoritmo, la macchina pen-

(*) Chiamata cosí da Wallis, il quale intende in generale come mantissa una frazione decimale.

sante, era stato arricchito di un nuovo istrumento, incredibilmente fine e penetrante, il quale, preparato una volta per tutte sotto forma di tabelle, schiudeva il regno dei numeri in modo realmente mirabile.

Non si aveva idea che il nuovo sistema di calcolo, che il numero *e*, base dei "logaritmi naturali", sarebbe diventato l'asse di tutta la matematica infinitesimale. Né alcuno pensava che la funzione logaritmica sarebbe stata il ponte di passaggio per effettuare integrazioni apparentemente insolubili, e che questo magico *e* avesse un futuro anche nel calcolo delle probabilità e dell'interesse.

Molto era stato fatto. Subito dopo si perfezionò l'istrumento, si migliorarono le tavole, si studiarono le possibilità d'interpolazione, e soprattutto si passò ad attaccare con la nuova arma, sotto la guida della gigantesca mente di Keplero, i problemi che l'astronomia e le scienze naturali ponevano in copia inesauribile, richiedendo un massimo di abilità e di esattezza.

Nello stesso tempo ardeva sotto le ceneri del fuoco recente gran numero di faville che, destate ben presto a nuovo incendio, annunziavano come una lampada che splende da lungi il sorgere della piú grande epoca della matematica, d'un grande periodo eroico in terra d'Occidente.

XI

DESCARTES

La matematica come metodo

Prima di entrare in quest'epoca eroica, è necessario parlare dello "spirito faustiano" dell'Occidente moderno, che già piú volte è stato citato. Come è noto, l'aggettivo "faustiano" nel senso da noi inteso, venne coniato da Spengler, al quale, in conseguenza delle sue grandi doti matematiche, fu dato di concepire la matematica quasi come il massimo simbolo della natura di ogni singola civiltà. Nel corso delle nostre considerazioni siamo arrivati alle stesse conclusioni; abbiamo visto che la matematica si rispecchia in modo totalmente diverso nei diversi popoli o nelle diverse civiltà e nei loro rappresentanti piú illustri. Ci riteniamo perciò in diritto di ammettere una variabilità nell' "ideale scientifico dei matematici", come lo chiama Pierre Boutroux. Con ciò non si vuole già dire che abbiamo fatto nostre le conclusioni del *Tramonto dell'Occidente*. Ma non è qui il luogo di esaminare questo complesso di problemi.

Vedremo presto dietro quali impulsi la matematica si è sviluppata e i risultati diversi che possono, anzi devono, ottenersi, a seconda che dietro l'indagine matematica si trovi un'aspirazione estetica, una tendenza magica o una volontà faustiana. Il desiderio di civiltà, se possiamo cosí esprimerci, il fine esteriore, hanno una grande importanza in tutte le invenzioni e scoperte. Nella matematica non avviene nulla di diverso dalla chimica, dall'ingegneria, dall'economia politica. Gli antichi cinesi conoscevano da migliaia d'anni la polvere

da sparo, sapevano che aveva una grande forza esplosiva — e l'impiegavano solo per fuochi d'artifizio. Era frutto di puerilità, di etica o semplicemente di poca accortezza? È assai difficile risolvere la cosa, è soltanto sicuro che il pensiero delle armi non era per nulla al centro della sensibilità cinese, altrimenti essi si sarebbero accorti del potente mezzo a loro disposizione, col quale avrebbero potuto foggiarsi un tutt'altro destino storico.

Nel caso degli antichi elleni abbiamo mostrato che essi si sacrificarono per un ideale scientifico tutt'affatto ideologico, e poco giovò che occasionalmente qualche spirito prometeico cercasse di rompere il rigido culto della geometria.

Ben diversamente agirono i popoli "faustiani". Per loro non esisteva già in partenza un chiaro mondo di amichevoli muse, da servire adeguatamente solo col riprodurre sulla terra il loro regno armonioso. Non c'era alcuna contraddizione per gli elleni, non dava loro alcun disturbo, se in un boschetto sacro, se presso le fonti che la fantasia popolava di ninfe e di semidei, se nella sabbia stavano disegnate le "impronte di uomini", le figure geometriche. Questa geometria delle pure proporzioni apparteneva all'"armonia delle sfere" come la musica o il piacere fisico. La tendenza ad aprire nuove strade, a tentare, a indagare, veniva tenuta lontano con un "*medèn àgan*" (niente di troppo), e il Diavolo dei primi cristiani era chiamato "il Tentatore" (*peirastes*) nel senso greco di indagatore.

Il mondo faustiano era ben diverso. In esso si trova sempre, vicino all'antico libro di Nostradamus, nella misteriosa penombra delle sale gotiche, un teschio e altri oggetti paurosi. Sulla soglia i topi rodono il pentagramma, poiché il disegno geometrico non è qui l'impronta amichevole degli uomini, ma un simbolo cabalistico contro il Demonio che minaccioso, canzonatore e al tempo stesso soccorrevole, sta già in ag-

guato davanti alla porta. Nella sua stanza il dottor Faust con la sua duplice anima medita sugli ultimi abissi dell'infinito e sulla conquista del mondo di quaggiú, e una disarmonia dopo l'altra lo sbalestra dalle regioni celesti a una disperazione che va fino al suicidio. Una immagine profonda dell'uomo gotico faustiano ci vien data da Conrad Ferdinand Meyer, quando fa dire al grande Ulrico Hutten: "Io non sono un libro astruso, sono un uomo con le sue contraddizioni". Essere umani in linguaggio faustiano ha lo stesso significato che essere in opposizione a qualcosa. Opposizione equivale a disarmonia, non nel senso di diversità statica, ma nel senso dinamico di una spinta verso l'alto per opera di forze contrastanti. Vi sono infatti sempre due anime, ahimé, nel petto di questi uomini. L'"ahimé" è l'ultima ribellione del debole, piccolo uomo contro l'inevitabile destino.

In un'anima cosiffatta la matematica doveva riflettersi altrimenti che in quella dei greci o degli arabi. Doveva anche nascere sotto una forma diversa, nella lotta e nell'agitazione. Vediamo infatti che un giovane ufficiale di cavalleria, la cui mente è piena di pensieri religiosi, di dubbî, di verità, di programmi, di illuminazioni, si apre faticosamente la via alla conoscenza mentre sui campi di Boemia partecipa a uno scontro dopo l'altro, finché nella pace del quartiere invernale d'Ungheria produce un'opera che non ha l'eguale nella storia della scienza. Boutroux dice di quest'opera che essa consiste "nel prevedere e nel mostrare come l'impiego sistematico delle coordinate rappresenti un metodo di una potenza e di una universalità non ancora conosciute nella matematica; un metodo destinato a sostituire e a superare tutti i precedenti, rivoluzionando e rigenerando col concetto di funzione tutte le scienze che avevano rapporti col tempo e con lo spazio".

Noi sappiamo che cosa significhi questo. Spuntano

di nuovo qui le *forme* di Nicola d'Oresme, e vediamo che i francesi hanno donato al mondo la possibilità di rappresentare queste *formae* dei fenomeni naturali. Nei francesi l'impulso faustiano si era unito all'antico senso plastico. Infatti Descartes, il nobile ufficiale di cavalleria di cui parliamo, non era stato il solo a trovare il metodo delle coordinate: il suo geniale compatriota Fermat aveva già percorso una via simile. Perché dunque si mette sempre Descartes in primo piano? È forse un'ingiustizia storica? Chiunque ha una cultura matematica media sa che ancor oggi si scrivono grossi volumi su Fermat, il poderoso teorico dei numeri, che i problemi di Fermat sono ancor oggi argomento di concorsi con premi vistosi, svalutati però dopo la guerra mondiale. Per comprendere appieno tale questione, nelle pagine seguenti dobbiamo analizzare il merito essenziale di Descartes con tutta precisione. Premettiamo però alcune considerazioni su un altro fatto, che si può chiamare l'"assorbimento della geometria greca": fenomeno spirituale ancor oggi non del tutto esaurito.

La storia del diritto — questo tanto per chiarire il nostro pensiero — c'insegna che durante e dopo il Rinascimento l'antico diritto romano cominciò a travolgere, come una marea incontenibile, le istituzioni legali del medioevo in tutta l'Europa. Lo si concepiva non come eredità del passato, bensí come il diritto dell'avvenire. Un uomo del secolo decimosesto avrebbe provato la stessa impressione, confrontando la propria tecnica con un compendio tecnico del secolo decimonono, se per magía gli fosse stato posto sotto gli occhi. Si sa che questo "assorbimento del diritto" cambiò radicalmente tutto l'aspetto della vita civile e politica dell'Occidente. Anche qui non si è ancora arrivati alla fine di questo processo, poiché specialmente ai nostri giorni si comincia a vedere un allontanamento consapevole o inconsapevole dal diritto romano in piú

di una questione, cosa che forse si può spiegare, tra l'altro, col fatto che cominciamo a raggiungere noi stessi il livello di maturità culturale, a cui questo diritto romano venne formato. Ma anche su quest'argomento purtroppo non possiamo diffonderci.

Il nostro scopo è semplicemente quello di istituire un parallelo col fenomeno dell'"assorbimento dell'antica matematica greca", la cui legge piú interessante è una specie di movimento a ritroso, finora, per quanto io sappia, non sufficientemente messo in evidenza nei trattati di storia della matematica, benché proprio questo movimento dia la spiegazione dello sviluppo e del carattere della matematica moderna, come ora mostreremo.

Ci rammentiamo che, dal punto di vista del tempo, venne prima Euclide, poi Archimede, poi Apollonio e infine Diofanto. Abbiamo anche detto che di queste quattro grandi figure Diofanto fu il primo a penetrare, dopo un lungo giro, nella coscienza dell'Occidente, finché da ultimo venne tradotto e commentato da Méziriac e servì a Fermat di spunto per molte ricerche sulla teoria dei numeri. Perciò fu l'ultimo dei grandi greci a essere "assorbito" per primo, nel pieno significato della parola. A Diofanto seguí il penultimo, Apollonio, la cui opera, come vedremo presto, servì di trampolino e punto di partenza per la geometria delle coordinate di Fermat e Descartes. Solo dopo Apollonio fu compreso appieno Archimede, con la scoperta della geometria infinitesimale, e l'ultima maglia della catena è rappresentata da Euclide, la cui definitiva rielaborazione mentale avviene sotto i nostri occhi.

Per evitare equivoci e facili obiezioni ai nostri argomenti, sia detto subito che non intendiamo già affermare con questo che Euclide e Archimede fossero completamente sconosciuti nel tardo medioevo o all'inizio dell'età moderna. L'"assorbimento" però è tutt'altra cosa; noi consideriamo un patrimonio spirituale

come completamente assorbito solo quando è stato inteso nell'intera sua struttura ed ulteriormente elaborato fino alle estreme conseguenze. In questo senso i nostri "assorbimenti" sono piuttosto estensioni di quanto è stato appreso e perfino emancipazioni dal modello.

Malgrado il desiderio di approfondire, nello spirito "faustiano" c'è una certa tendenza spensierata e temeraria, senza di che non potrebbe esistere e agire. Così il primo contatto con la matematica greca non fu altro che una serie di interpretazioni incomplete o errate, appena ci si allontanava dalle questioni più elementari. Ma anche nella semicomprensione vi era un impulso mistico: si voleva penetrare tutto, si andava talvolta oltre la mira, e si scopriva del nuovo. Tutto questo senza sistema e senza impaccio di scrupoli filosofici e religiosi. Quando però all'inizio del secolo decimosettimo si ebbe in mano una quantità di risultati che arrivavano talvolta molto più in là di quelli degli antichi, si volle avvicinarsi con tutta reverenza allo spirito rigoroso degli elleni, da un lato per controllo di quanto era stato raggiunto, dall'altro per scoprire appigli e lacune che dessero adito a un ulteriore progresso. Ciò suscitò spesso grande meraviglia e ammirazione per la comprensione sempre maggiore delle opere antiche, e, malgrado i successi recentemente ottenuti, vi fu una tendenza a prendere come modello l'ideale formale e scientifico delle opere greche, che dovevano essere oggetto di emulazione, anche se non dal punto di vista del contenuto, sempre però dal punto di vista della costruzione e dell'indirizzo mentale. Questo processo continua ancor oggi; quando si esige per esempio la "massima rigorosità", non si fa altro che richiamare una tendenza greca, orientata in particolare verso Euclide.

Malgrado questa innegabile ripresa sostanziale e formale del pensiero greco, lo spirito faustiano non sareb-

be stato quello che è se non fosse sorto anche un movimento rivoluzionario contro la costrizione dell'ellenismo. L'Ellade doveva essere, per così dire, assorbita e disfatta, e proprio qui sta la differenza tra Fermat e Descartes. Fermat parte da speciali problemi sulle equazioni accennanti già alla teoria dei numeri, problemi che abbiamo appreso a conoscere nel capitolo su Diofanto, e arriva a fondare indipendentemente una propria teoria. Qui sta la sua opera rivoluzionaria che, superando Diofanto, diventa rappresentativa di un'epoca. Nella geometria però, malgrado la sua scoperta di vere e proprie coordinate, Fermat si considera solo come amministratore del patrimonio greco, che "assorbe" nel senso ristretto della parola, riconoscendo la geometria come l'asse fisso della matematica, e non cerca di far altro che assistere e arricchire la geometria con l'aritmetica e con l'algebra.

L'atteggiamento di Descartes è tutto diverso. Per lui l'aritmetica e l'algebra non solo precedono logicamente la geometria, ma le sono superiori anche come sostanza, perché rappresentano una scienza delle grandezze assai più generale, che può essere applicata, tra l'altro, anche alla geometria. Questo "tra l'altro" è il punto fondamentale. Con questa concezione viene dato il colpo di grazia alla valutazione greca, la geometria è detronizzata definitivamente dal suo rango di regina della matematica e al posto della matematica geometrizzata subentra la matematica algebrizzata.

Poiché quest'ultima affermazione è atta a confondere le idee e poiché si tratta di problemi tutt'altro che facili, è necessario soffermarsi un poco sull'effettivo pensiero di Cartesio; tanto più in quanto la sua opera ha il titolo sorprendente di *Geometria*. Lasciamo perciò parlare lui stesso.

Descartes dice all'inizio del primo libro dell'opera citata (1637): "Tutti i problemi della geometria si possono facilmente ricondurre ad un'espressione tale, che

basti poi la conoscenza di certe rette per risolvere graficamente questi problemi. E così come l'aritmetica consiste di solo quattro o cinque operazioni, cioè l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione e l'estrazione di radice, che può anche essere considerata come una specie di divisione; del pari nella geometria, per trasformare le linee cercate in modo da riportarle a qualche cosa di già noto, non si ha da far altro che aggiungervi o sottrarne altre linee. O anche, se è data una linea che io, per porla in più stretto rapporto coi numeri, chiamerò l'unità, e che in generale può essere assunta del tutto a piacere, e altre due linee, basta trovarne una quarta che stia a una delle due come l'unità sta all'altra, il che equivale alla divisione. O infine, dovendosi trovare uno o due o più medi proporzionali tra l'unità e altre linee qualsiasi, ciò equivale all'estrazione di radice quadrata, cubica, ecc. E io non mi farò riguardo d'introdurre nella geometria queste espressioni prese in prestito all'aritmetica, per farmi comprendere meglio...".

"Qui è da osservare che io con a^2 o b^3 o altre espressioni simili intendo in generale semplici linee e che, per poter usufruire della terminologia usata nell'algebra, le chiamo quadrati, cubi ecc.".

Esaminiamo ora un po' più da vicino queste proposizioni, che stanno proprio all'inizio della *Geometria* di Descartes. Il loro contenuto è rivoluzionario, come appare a prima vista. Qui viene enunciato infatti l'importante principio di far corrispondere una lunghezza a ogni numero, in qualunque modo esso sia generato. La quantità a è rappresentabile con una lunghezza, così la somma $(a+b)$ o la differenza $(a-b)$, e così anche il prodotto $a.b.c.d...$ ovvero il quoziente $a:b$. Ma non basta. Anche a^2 o a^3 oppure a^4 e a^n possono essere considerate come lunghezze e così pure le radici di ogni grado. Con ciò la geometria viene esonerata dal suo ufficio algebrico. Il concetto di di-

mensione, cioè la barriera posta dalle dimensioni a ogni algebra geometrica, è caduto, e basta mantenere fittiziamente e formalmente il principio di omogeneità. Ogni specie di grandezza viene riportata alla stessa dimensione, dato che si lavora solo con linee che rappresentano numeri. Anche tutte le potenze delle incognite non significano niente altro che lunghezze o punti, per il momento ancora indeterminati, della linea. A noi questa impresa di Descartes non fa cosí grande impressione perché il suo "metodo" si è immedesimato in noi. Ma fu un avvenimento capitale, che rese possibile la seconda impresa della creazione di una geometria analitica vera e propria. E quando Zeuthen dice che da Descartes in poi la matematica è passata dallo stadio della lavorazione manuale a quello della grande industria, dobbiamo dargli ragione. È da notare che per il momento parliamo solo della *Geometria* e non del *Calcul de Monsieur Descartes*. Ritorneremo su questa seconda opera, nella quale tutto quello che è stato detto diventa ancora piú chiaro.

Descartes stesso ha riconosciuto tutta la portata rivoluzionaria della sua impresa. Qualche pagina piú avanti dice infatti: "Questo non sembrano aver notato gli antichi, altrimenti non si sarebbero dati la pena di scrivere tanti libri, nei quali già la disposizione dei loro teoremi lascia vedere che non erano in possesso del vero metodo col quale tutti i teoremi si ricavano, ma che hanno raccolto viceversa solo quelli in cui si sono imbattuti". E in un altro punto: "Vorrei dire qui incidentalmente che i dubbi degli antichi circa l'impiego delle notazioni aritmetiche nella geometria (derivanti solo dal fatto che per essi non era ancora sufficientemente chiaro il rapporto tra queste due discipline) provocarono una certa oscurità e pesantezza d'espressione...".

La seconda citazione si riferisce ad Apollonio e a Pappo. Questi due giudizi sono piú che duri, e giun-

sero in parte molto oltre il bersaglio, ma con essi vogliamo solo dimostrare con quale chiarezza Descartes si rendeva conto di quello che faceva. Per Descartes i greci non erano dunque in possesso del "metodo giusto". Non vedevano l'identità dell'algebra e della geometria. Non costruirono sinteticamente con l'algebra una dottrina generale delle "forme", che si potesse far salire a qualunque altezza desiderata, senza preoccupazioni delle questioni reali riguardanti le dimensioni, lo spazio, ecc. Quando si sia costruita una volta la scienza delle forme o quantità in via del tutto generale, mediante la magía dell'algoritmo, si può sempre ritornare alle discipline dell'aritmetica e della geometria, subordinate a quest'algebra cosí generalizzata, e riservate quindi al campo delle pratiche applicazioni.

Anche se Descartes stesso non ha espresso queste vedute in forma cosí netta, possiamo ricavarle altrettanto bene dai commenti dei suoi più prossimi discepoli. Scrive per esempio il cartesiano Erasmo Bartholin nella prefazione all'edizione della *Geometria* dell'anno 1659: "In principio fu utile e necessario dare aiuto alla nostra capacità di pensare astrattamente; perciò i geometri ricorsero alle figure, gli aritmetici alle cifre, altri ad altri mezzi. Ma questi metodi non sembrano degni dei grandi uomini, che aspirano al nome di dotti. Una grande mente fu appunto quella di Descartes". E nel *Calcul* già citato Descartes ha realmente cercato di istituire un'algebra che prescinda da qualsiasi numero concreto e da qualsiasi figura.

A questo punto dobbiamo aggiungere che Descartes anche esteriormente adopera una scrittura o "notazione" quasi identica a quella che si è conservata fino ad oggi. Questa è in un certo modo la pietra di paragone della sua opera. Vedremo infatti con Leibniz che la scienza delle relazioni matematiche passa talvolta in seconda linea di fronte all'importanza di una notazione adeguata. Questo perché la matematica è

in fondo una magía del pensiero e gli spiriti appaiono quando vengono evocati con le formule adatte.

Descartes perciò si era proposto come mèta del suo metodo niente meno che la completa ricostruzione della matematica su premesse semplicissime, non geometriche come in Euclide, ma algebriche. Con questo metodo la geometria doveva una volta o l'altra cadere da sé come un frutto maturo.

Questa speranza di una universale completezza, benché piuttosto spinta, era in massima parte giustificata. A noi oggi appare cosa ovvia di poter rappresentare ogni espressione algebrica con una curva (*) e reciprocamente ogni curva con una espressione algebrica. La dimostrazione della legittimità di questa identificazione si è avuta tuttavia solo in tempi recentissimi, specialmente dopo Hilbert.

Come fa Descartes a costruire la sua matematica, dove ogni linea è un numero? Su questo c'informa egli stesso esattamente quando dice: "Dovendosi ora risolvere un qualunque problema, lo si considera anzitutto come già definito, e s'introducono delle denominazioni per tutte le linee che appaiono necessarie alla costruzione, tanto per le incognite come per le altre. Successivamente, senza fare alcuna distinzione tra linee note ed incognite, si devono considerare le difficoltà del problema nella successione che deriva nel modo piú naturale dalla reciproca dipendenza di queste linee, finché si trova il mezzo di rappresentare una ed una sola grandezza sotto due forme diverse. Si ha cosí un'equazione, perché le espressioni che corrispondono ai due modi di rappresentazione si equivalgono. Occorre allora trovare tante equazioni quante sono le linee incognite; se però non si riesce a formarne tante, benché non si sia trascurato nulla di quel che è

(*) La parola "curva" è qui intesa in senso lato. Le forme con piú di due variabili sono naturalmente superfici, volumi o pluralità di ordine superiore.

contenuto nel problema, allora il problema non è compiutamente determinato...".

È importante in questa regola la condizione che si debba presupporre un problema come definito e si debbano considerare le relazioni tra le linee fin quando si trovi il modo di costruire una o piú equazioni. Queste due condizioni sono fondamentali nella geometria analitica e nel metodo analitico in generale. Se non si conoscono certi teoremi, certe dipendenze o relazioni, non si è in grado di sviscerare il problema e di formare delle equazioni. Questo è proprio il contrario dell'ideale sintetico perseguito da Descartes nella sua algebra; bisogna però adoperare tutt'e due i metodi, e cioè lasciarsi condurre sinteticamente dall'algoritmo per costruire un mondo delle forme, per quanto possibile esente da lacune, che si possa poi esaminare analiticamente rifacendo il cammino a ritroso. Se per esempio prendiamo tutte le possibili equazioni della forma $a_1x^3+a_2x^2+a_3x^1+a_4x^0=y$ e troviamo che rappresentano curve di "terzo grado", possiamo allora scoprire per via puramente algebrica le proprietà comuni e generali di queste curve, chiedendoci per esempio quanti punti d'intersezione ha una curva di questo genere con una retta della forma $a_1x^1+a_2x^0=y$. Questo lo scopriamo considerando le due espressioni in modo puramente algoritmico ed algebrico come equazioni con due grandezze incognite. Se vogliamo viceversa stabilire l'equazione di una curva, della quale conosciamo la sola costruzione meccanica, allora dobbiamo, con l'aiuto di teoremi, proposizioni, ecc., trovare nella curva stessa delle relazioni alle quali ogni punto della curva soddisfi; e ciò come uguaglianza, come "equazione" tra due espressioni diverse.

Osserviamo che la parola "coordinate" non si trova ancora in Descartes. Questa fu un'espressione coniata da Leibniz verso la fine del secolo decimosettimo per quelle che Descartes chiama "linee fondamentali". Ma

Descartes usa anche di rado gli assi incrociati ad angolo retto, oggi detti "cartesiani", lavora piuttosto con diversi sistemi di coordinate, in generale oblique, ancora poco evidenti per i nostri occhi. Comunque, la coordinazione nel nostro senso moderno esiste già completamente. Questo si vede subito dal secondo libro

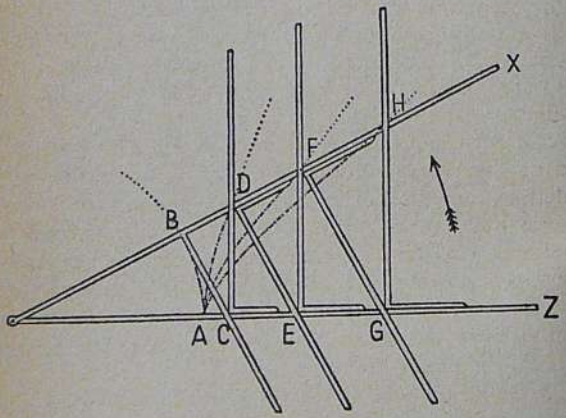


FIG. 6

della sua *Geometria*, dove prende in esame le curve col microscopio analitico e parla subito di una "serie infinita" di curve di ordine sempre maggiore, essendo l'ordine della curva indicato dall'esponente piú alto contenuto nella sua equazione. Poiché, dice Descartes, "... per raccogliere insieme tutte quelle [curve] che si presentano in natura e poterle separare in diverse specie secondo una certa serie, la cosa migliore è far rilevare che tra tutti i punti della linea da disegnare geometricamente, cioè tutti quelli che ammettono una misura netta e precisa, e tutti i punti di una retta, deve necessariamente esistere una relazione, che può essere rappresentata in modo compiuto con una

ed una sola equazione, e che la linea curva appartiene alla prima e piú semplice specie quando quest'equazione contiene solo il rettangolo (*) di due grandezze indeterminate o il quadrato di una di esse (a questa prima serie appartiene solo il cerchio, la parabola, l'iperbole e l'ellisse), ma appartiene alla seconda specie quando l'equazione nelle due grandezze indeterminate (ne occorrono infatti due per rappresentare la relazione di un punto rispetto a un altro) o una di esse grandezze arriva alla terza o alla quarta dimensione, e alla terza specie quando l'equazione contiene la quinta e la sesta dimensione e cosí via all'infinito".

Questo enunciato fondamentale ha bisogno di alcune osservazioni complementari. Come abbiamo già detto, Cartesio aveva compreso chiaramente che la serie delle curve "composte" di ordine crescente è infinita. Una curva è chiamata "composta" quando la sua generazione meccanica si scosta sempre piú dalla costruzione con riga e compasso. Per chiarire questa circostanza Descartes dà la dimostrazione di un apparecchio che ora illustreremo.

Si abbia un punto Y intorno al quale il braccio YX può ruotare nel senso della freccia partendo dalla posizione YZ. Sulle due braccia scorre un numero qualsiasi di righe che nella posizione iniziale sono sovrapposte, di guisa che i punti B, C, D, E, F, G e H sono riuniti nel punto A. Se ora facciamo ruotare YX, le righe scorrono l'una rispetto all'altra secondo il grado di libertà che ad esse rimane e i punti B, D, F e H descrivono curve diverse, ognuna delle quali è di un grado superiore alla precedente. Il punto B descrive un cerchio. Non possiamo entrare in particolare nei problemi che derivano da questa concezione, diciamo solo che Descartes pensa alle curve come se fossero generate dinamicamente o "forono-

(*) Cioè il prodotto.

micamente". La espressione "foronomia", ora in disuso, significa appunto scienza astratta del movimento. Descartes dice altrove che si devono introdurre nella geometria curve di qualsiasi grado, "a condizione che si possano concepire come descritte con un movimento continuo o con diversi movimenti successivi, ognuno dei quali sia compiutamente definito dai precedenti; poiché in tal modo si può sempre avere una rappresentazione netta delle dimensioni di una tale linea". Dice inoltre che solo per caso gli antichi greci si erano scoraggiati dal considerare curve di grado superiore avendo costruito dinamicamente e studiato fin da principio la spirale e la quadratrice. Queste curve però potevano esser descritte solo "mediante due movimenti diversi che non avevano tra loro alcun rapporto misurabile". In linguaggio moderno, esse non sono rappresentabili con funzioni algebriche, sono trascendenti. I greci avevano ritenuto che la stessa cosa fosse valida per tutte le curve superiori di grado alle sezioni coniche, benché questo non sia vero, e non avevano perciò spinto piú in là le loro indagini.

Alla citazione fatta piú sopra si deve aggiungere che Descartes riunisce in una sola specie le curve di terzo e quarto grado, quelle di quinto e sesto, e cosí via, e questo solo perché è in grado di ridurre, con adeguate trasformazioni, il quarto grado al terzo, il sesto al quinto, ecc. Oggi abbiamo tralasciata in generale questa distinzione cartesiana, e parliamo solo del grado di una curva, corrispondente alla potenza piú elevata che si trova nella sua equazione.

Descartes dice ancora in un altro luogo che sceglie una retta, "per poter riferire ai punti di essa i punti di una linea curva". Inoltre sceglie su questa retta un punto di partenza dal quale iniziare il calcolo. "Io dico", cosí continua, "che scelgo questi due elementi perché sono libero di assumerli a piacere; infatti, quand'anche si possa fare in modo che, con una scelta

appropriata, l'equazione diventi piú breve e piú semplice, si dimostra facilmente che la linea appartiene sempre alla stessa specie, comunque sia stata fatta la scelta".

Abbiamo lasciato parlare Descartes in persona cosí spesso e cosí esaurientemente, perché ognuno possa farsi un concetto della precisione con cui egli stesso considerava la sostanza del suo metodo. Si leggono spesso affermazioni che alterano questi fatti in senso sia positivo che negativo. Da un lato si attribuisce a Descartes di non essersi appoggiato su nulla, di essere arrivato dal nulla alle sue proprie concezioni, dall'altro si afferma che abbia solo intuito la geometria analitica nel senso nostro. A giudicare dalle sue parole non si può parlare né di una cosa né dell'altra. Egli conosce molto bene i suoi predecessori fino ad Apollonio, ma sa altrettanto bene che sta creando qualche cosa di nuovo in relazione con la sua filosofia. Alla fine della sua *Geometria* considera anche l'analisi da un punto di vista puramente algoritmico, e a sostegno dell'analisi costruisce in modo del tutto sintetico una teoria delle equazioni che è di per sé degna d'esser conosciuta. In essa dimostra di aver compreso chiaramente che il grado dell'equazione determina il numero delle soluzioni (*), le quali del resto possono essere anche negative o "false", come Descartes le chiama ancora. Incidentalmente introduce le espressioni "reale" e "immaginario", e scopre la legge del cambiamento dei segni. Alla fine della sua *Geometria* osserva che non ha intenzione di scrivere un grosso volume, ma che ha cercato di dire molto in poche parole; egli pensa che si potrebbero risolvere col suo metodo tutti i problemi piú elevati della geometria, cosí come in matematica non è difficile, cono-

(*) Il cosiddetto "teorema fondamentale dell'algebra", enunciato per la prima volta da Girard nel 1629.

scendo i primi due o tre termini di una serie, trovare tutti gli altri. "Ed io spero", cosí conclude, "che i nostri pronipoti mi saranno grati non solo per le cose che ho qui raccolte, ma anche per quelle che di proposito ho tralasciato, per lasciar loro il piacere di trovarle".

Quest'ultima frase non ha l'eguale in tutta la storia della scienza. Descartes è infatti di certo un uomo onesto obiettivamente e soggettivamente. Egli era uno spirito sovrano come pochi, un *grand seigneur* dell'alta scienza. Nelle sue parole si sente quasi l'avversione di un vecchio aristocratico per chi dice troppo. Egli sa, vede chiaro e basta. Di che altro si deve preoccupare il suo pensiero? Quel pensiero che secondo la massima "*cogito, ergo sum*" è, per cosí dire, la dimostrazione della realtà dell'universo. Ma Descartes è anche un ufficiale, conosce i suoi doveri: *noblesse oblige*. Perciò deve parlare, e allora dice le cose piú importanti ed originali; ma una volta soltanto per quel che si riferisce alla matematica, poiché la *Geometria* non è altro che l'appendice di una pubblicazione di portata molto piú vasta, il *Discours de la méthode*. Non lo interessano le scoperte o i risultati, ma la preparazione degli strumenti. E scrive a Mersenne, subito dopo la pubblicazione della *Geometria*: "Per quanto riguarda la geometria non vi aspettate altro da me. Sapete infatti che da lungo tempo mi rifiuto di occuparmene". Le sue intenzioni sono altre. "Chi voglia esaminare attentamente i miei pensieri" dice nel IV libro delle *Regulae*, "noterà che ho di mira una scienza affatto diversa dalla matematica. La matematica potrebbe essere il suo involucro piuttosto che una parte di essa".

Quest'ultima confessione è profondamente rivelatrice; ne viene confermato tutto quello che di grande intuiamo in Descartes, quando lo allontaniamo dal campo limitato della competenza specifica per elevarlo ad una sfera superiore. Descartes è il primo fondatore

pienamente consapevole di una matematica universale, che si potrebbe anche designare col nome di "matematica strumentale". La matematica è una via alla mèta, un metodo, un involucro, uno strumento. E questa macchina deve essere costruita, perfezionata, polita, raffinata, per poter correre alla velocità voluta.

Algoritmo e notazione, ricerca della forma piú generale, affratellamento dell'aritmetica e della geometria: queste sono per Descartes le premesse per procedere innanzi. Tuttavia gli assi intorno a cui tutto il meccanismo ruota sono gli assi coordinati, i quali permettono, con una "relazione per punti", di trasformare la retta in curva e la curva in retta. Benché, come dice Descartes, la relazione tra curva e retta non sia sempre identificabile, si ha però in mano una macchina per attaccare il problema. La retta ci riporta all'unità di misura e quindi al numero in sé. Da ora in poi due mondi nettamente distinti si riflettono l'uno nell'altro e si prestano a vicenda le loro forze e le loro possibilità, e cioè la sfera del "pensiero" e la sfera dell'"estensione", per usare le parole di Descartes. Noi diremmo oggi "concetto" e "intuizione". Cosí la superiore forma algebrica diventa una volta numero e un'altra volta figura, con un continuo passaggio dall'algoritmo alla curva e da questa all'algoritmo. In tal modo ogni "forma", ogni fenomeno naturale può essere descritto e interpretato numericamente, solo che abbia un certo decorso, e dalla dinamica si può passare alla statica e dalla quiete ritornare al movimento, come si vuole.

In un altro punto si vede già in Descartes il germe di una scienza futura, cosa di cui è molto probabilmente consapevole, quando dice: "Credo che avrei messo in evidenza tutto quanto è degno di nota circa gli elementi della linea curva, quando avessi sviluppato ancora in generale il metodo per tracciare, in un qualsiasi punto di una curva, una retta che tagli la curva stessa ad angolo retto. E oso dire che questo

è non solo il problema piú generale e piú utile che io conosca, ma anche quello che nella geometria mi sono sempre augurato di risolvere". Con ciò viene esposto in modo affatto generale il problema delle tangenti, delle normali, delle sottotangenti e sottonormali, e precisamente dal punto di vista geometrico-analitico. Descartes sa che non si tratta di un giuoco vano: il suo sguardo acuto deve aver riconosciuto che le tangenti e le normali sono per cosí dire quelle che impongono la legge alla curva. Perciò vuole trovare anche l'equazione della normale in qualsiasi punto della curva; infatti conoscendo la normale si ha la tangente in ogni punto e l'angolo che essa forma con le coordinate o linee fondamentali. Basta ora dare valori qualsiasi a una delle variabili nell'equazione della tangente, per conoscere l'inclinazione della stessa rispetto all'asse orizzontale. Descartes non arriva però con le sue indagini fino a questo punto, almeno esplicitamente. Egli pone solo le premesse per considerazioni di questo genere e si preoccupa di sgombrare la via da ogni difficoltà.

Per finire vogliamo ancora illustrare la distinzione tra il nuovo metodo di Descartes e i precedenti sistemi di rappresentazione delle coordinate. Descartes ha sviluppato il suo metodo fino in fondo. Sceglie a piacere le sue linee fondamentali, i suoi assi, fissa a piacere l'origine delle coordinate e riferisce a questi assi coordinati la figura da analizzare solo per punti. Gli assi però non sono implicitamente altro che linee graduate, le quali possono rappresentare qualsiasi numero, dato che i numeri sono sempre linee, indipendentemente dall'operazione da cui derivano. Somme, differenze, potenze, radici, sono tutte lunghezze e nient'altro che lunghezze. Con ciò qualsiasi equazione algebrica con due incognite diventa un sistema di rapporti tra lunghezze, può essere rappresentata in modo equivalente ed univoco entro il sistema di coordinate pre-

scelto. Reciprocamente ogni curva o figura, per quanto complessa sia la sua generazione, per quanto molteplici siano i movimenti che, dinamicamente parlando, la determinano, può essere trasformata in una equazione che contiene in sé con continuità la legge della curva. Ora che il numero e la forma sono stati riportati a un unico denominatore comune, la lunghezza, può aver luogo in ognuno dei due campi, tra loro essenzialmente diversi, un progresso ulteriore, una composizione o scomposizione secondo le leggi proprie di ciascuno. Con le equazioni si può calcolare secondo i metodi dell'aritmetica e dell'algebra come se fossero espressioni numeriche normali; con le figure si procederà secondo le regole della geometria. Malgrado la diversa trattazione, si dovrà però avere in qualunque momento una concordanza perfetta, se il parallelo tra curva ed equazione è esatto e completo fin dall'inizio. È nato cosí un algoritmo bifronte, un meccanismo doppio con accoppiamento forzato. E questa grande impresa di Descartes, sotto il nome di "geometria analitica" domina, come tutti sappiamo, il pensiero matematico fino ai nostri giorni. Di piú: questo doppio algoritmo diventò poi lo strumento col quale l'umanità occidentale, attraverso le varie applicazioni alla fisica e alla meccanica, ha trasformato l'aspetto della Terra.

XII

LEIBNIZ

L'universo matematico

Se per questo capitolo avessimo a disposizione lo spazio di un libro, vi sarebbe di che riempirlo senza stancarci. L'impetuoso slancio in avanti della matematica nel secolo decimosettimo, malgrado gli avvenimenti politici piú sovvertitori, non ha l'eguale nella storia della scienza. Quando parliamo di avvenimenti politici, non pensiamo soltanto alla guerra dei trent'anni: anche le guerre di conquista di Luigi XIV e la gigantesca lotta per l'egemonia navale combattuta su tutti i mari tra l'Inghilterra e l'Olanda, riempiono questo secolo e sconvolgono personalmente alcuni dei principali attori degli eventi riguardanti la matematica, come per esempio Jan de Witt; oppure Hudde, il quale dette maggiore importanza ai suoi doveri di borgomastro di Amsterdam che al suo genio algebrico e si allontanò quindi spontaneamente dalla schiera dei grandi matematici. Di fronte a simili alternative si trovarono però anche Leibniz e Newton, e le invasioni turche alla fine del secolo fecero dubitare che la marea d'Oriente spazzasse via e seppellisse per secoli nel fango l'edificio della matematica occidentale, che stava giusto ora per arrivare al suo coronamento.

Pur tuttavia la frase "*inter arma silent Musae*" si adatta assai poco a quest'epoca. Che le muse tacciano in mezzo al fragore delle armi non è esatto né per la lirica né per l'idillio; e tanto meno, a quanto c'informa la storia della scienza, per quei campi dello spirito che vengono coltivati da "veri uomini". A questi

campi appartengono in prima linea le scienze matematiche. Fondandosi sulla storia, si potrebbe più facilmente dimostrare che l'eco dei grandi fatti si propaga e risuona nell'anima dei creatori del mondo spirituale. E come le donne più nobili nei tempi di maggiore necessità non si sottraggono alla loro missione e regalano lietamente all'umanità nuove creature perché la vita non perisca, così gli uomini, ognuno al suo posto, tendono tutte le loro forze per contribuire alla vittoriosa affermazione del loro mondo particolare.

Questi pensieri a proposito di Leibniz sono pienamente giustificati. Con lui appare infatti un uomo consapevolmente destinato ad aiutare il suo popolo a risollevarsi dall'oppressione in cui era caduto. Si vede nuovamente in Leibniz, come ai tempi di Pitagora, che il sentimento patriottico può racchiudere in sé anche un valore universale; poiché solo un uomo, il quale ubbidisca senza impacci alla legge della personalità ed esalti tutte le forze del suo essere, può irradiare quell'ascendente spirituale che, come dice Goethe di Schiller, presto o tardi riesce a vincere l'opposizione e l'ottusità del mondo.

Ma non vogliamo correr troppo, poiché nel caso di Leibniz, più che per qualsiasi altro matematico, l'enunciazione generale dei problemi costituisce la premessa necessaria per una comprensione anche approssimativa della sua opera e della sua importanza. Ciò è tanto più vero in quanto, a cominciare dai contemporanei di Leibniz, i due secoli successivi si adoperarono per trasparenti motivi d'ogni genere a oscurare la sua figura. Ma neanche su questo possiamo qui dilungarci, dobbiamo anzi limitarci assai nella nostra esposizione, e anzitutto ci proponiamo di chiarire in generale la situazione esistente nel secolo decimosettimo nel campo della matematica, ricordando come il grande Descartes facesse dell'ironia a proposito dei "grossi volumi" dei geometri greci e rimproverasse agli an-

tichi di non aver ottenuto i loro risultati sistematicamente, ma di averli solo raccolti cammin facendo. Meno di una generazione piú tardi sentiamo da Leibniz che egli ha dimostrato quanto sia limitata la geometria del signor Descartes e che i problemi piú importanti non dipendono da equazioni del genere di quelle alle quali tutta la geometria del signor Descartes si riduce, e via dicendo. Già l'espressione "signor Descartes" ci fa vedere quanto poco tempo è trascorso: Leibniz polemizza, benché Descartes sia già morto, come se si trattasse di persona ancor viva, e giunge a dire: "Non ho potuto trattenermi dal ridere quando ho visto che egli (cioè il cartesiano Malebranche) considera l'algebra (*) come la piú grande e la piú sublime di tutte le scienze".

Non è qui il luogo di dire fino a che punto Descartes e Leibniz siano andati oltre il segno coi loro giudizi: questo risulterà immediatamente dalle considerazioni che seguono. Vogliamo però mostrare come questi due grandi abbiano sentito entrambi soggettivamente il ritmo del progresso in atto. Vediamo che questo ritmo si può indicare senza esagerazione come un "precipitoso divenire", altrimenti sarebbe incomprensibile che uno di essi schernisca tutto ciò che è stato fatto prima, mentre l'altro appena quarant'anni dopo ride della precedente rivoluzione spirituale.

Dobbiamo dunque mettere bene in chiaro quello che c'è di nuovo e di essenziale in questo periodo di grandi scoperte, in quest'epoca che per la matematica è probabilmente piú fruttifera di tutte le precedenti. Bisogna però prendere le mosse da molto lontano, almeno per quanto riguarda il calcolo infinitesimale, altrimenti non sarebbe possibile comprendere questo metodo di calcolo, né esporre nella giusta luce le importantissime conseguenze dell'opera di Leibniz.

(*) S'intende qui l'algebra delle quantità finite.

Nel capitolo su Archimede abbiamo visto che i problemi infinitesimali non erano cosa rara neanche presso gli elleni, e che questi problemi ebbero mirabile impulso per opera di Archimede. Questo impulso non portò tuttavia ad un metodo generale, ma si esaurí in problemi singoli e non ebbe ulteriori sviluppi degni di nota, anche se Pappo nel suo quinto libro arriva fino ai problemi isoperimetrici, affini sotto un certo punto di vista alle nostre questioni sui valori massimi e minimi di una funzione.

Abbiamo già parlato dell' "assorbimento" della matematica classica, osservando che era avvenuto procedendo a ritroso nel tempo. Quest'affermazione è esatta se consideriamo solo Leibniz e Newton come primi eredi di Archimede o come i suoi moderni interpreti. Tuttavia questo assorbimento aveva avuto già una precedente storia con nomi non del tutto insignificanti, dei quali ora ci occuperemo. Vedremo cosí anche per quali motivi non ci è possibile porre questi precursori su uno stesso piano con Archimede, dato che sono piuttosto da paragonare a Democrito o al massimo ai precursori di Eudosso, dal punto di vista di una contemporaneità culturale nel senso di Spengler.

Citiamo Galilei e i suoi allievi, e Keplero, col quale cominceremo. Si noti che sicuramente l'astronomia e la fisica tennero a battesimo il nuovo calcolo infinitesimale, ma però solo un aspetto di questo calcolo, che si potrebbe definire come l'aspetto dinamico, illustrato brillantemente da Isacco Newton. È quel lato dello spirito faustiano che abbiamo già incontrato in Nicola d'Oresme, Bradvardino e Cusano, quella rappresentazione delle "forme" e quell'analisi dei movimenti che doveva in un modo o nell'altro urtare contro i paradossi della filosofia di Zenone, già ben nota in Occidente. Nel caso di Keplero, questo originale genio vagabondo, fu un movente esteriore a farlo riflettere su tali argomenti. Avvenne che a Linz, nel-

l'Austria superiore, dove in quel tempo (1612) Keplero si trovava, vi fosse una vendemmia eccezionalmente abbondante, e così pure in tutta la valle del Danubio austriaco e nelle vicine regioni coltivate a vigneti. Keplero approfittò di questa circostanza e acquistò alcune botti di vino, scaricate a Linz da battelli che risalivano a rimorchio il Danubio e vendute a vil prezzo. Vide allora con meraviglia che il venditore, per calcolare la capacità della botte, infilava semplicemente una bacchetta graduata nel cocchiume e in base alla distanza di questo dalla parete opposta determinava il volume cercato. Keplero sapeva che sul Reno si misurava il contenuto delle botti coi boccali oppure, quando si adoperavano regoli graduati, occorreva eseguire un gran numero di misure prima di arrivare al risultato. Meditò tre giorni sul problema della cubatura delle botti, da lui concepite come solidi di rotazione, e finalmente lo risolse. In ciò deve aver avuto importanza decisiva anche un'altra considerazione — secondo quanto racconta una specie di leggenda —. Non si sapeva infatti dove mettere una così grande quantità di vino, e si dice che Keplero sperasse, di trovare una forma di botte che a parità di superficie e quindi a parità di materiale impiegato, possedesse una capacità maggiore delle botti esistenti, cosa che avrebbe rappresentato naturalmente un grande vantaggio economico, poiché tanto il legname che la mano d'opera erano assai cari e lo sono ancor oggi. Si convinse però che le botti austriache, "*dolia Austriaca*", avevano una forma che era all'incirca quanto di meglio si poteva desiderare, molto migliore in ogni caso delle botti renane, il che l'indusse a fare la seguente riflessione: "*Quis neget, naturam instinctu solo, sine etiam ratiocinatione, docere geometriam?*". Chi può negare che la sola natura umana, anche senza il ragionamento, sia in grado di insegnare la geometria? Dovremmo qui tradurre liberamente anche quell'altra interessante ri-

flessione di Keplero, che gli uomini sono guidati in ciò esclusivamente dall'occhio e dall'estetica dell'oggetto. Perciò l'intuito e il senso delle proporzioni e della forma sono le premesse naturali di una mente orientata verso la geometria. Questa sentenza è doppiamente singolare per un uomo come Keplero, che la posterità volle sempre rappresentare come freddo ed arido calcolatore e ferreo razionalista. A questo punto non vogliamo tralasciare di osservare che s'incontrano sorprese a ogni passo, quando ci si libera da tutti gl'interpreti piú o meno autorizzati della storia e, risalendo alle fonti, si considerano i fattori spirituali determinanti. Si comprende facilmente che l'odio e il favore di parte confondano la rappresentazione dei caratteri e rendano incerta la storia. Ma una storia siffattamente vaga può allontanare un popolo dalla sua linea di sviluppo, specialmente quando fa del dinamico Keplero un arido razionalista e del faustiano Leibniz un originale topo di biblioteca o addirittura l'iniziatore dell'illuminismo liberalistico. Le grandi menti hanno sempre una natura complessa, irrazionale perfino, altrimenti non potrebbero abbracciare la struttura altrettanto complessa e irrazionale del mondo. Perciò si trovano facilmente nelle loro opere "documenti" per qualsiasi ipotesi. Esiste però per gli studiosi di psicologia storica anche un'altra specie di "documenti", che è la preferita, e cioè uscite che illuminano di colpo gli oscuri recessi della mentalità di un uomo e sulle quali non è possibile sottilizzare, perché sono chiare e lampanti. Un intellettualista non potrà mai affermare, come Keplero, che la natura stessa c'insegna a risolvere un problema sui massimi, ma combatterà aspramente un'affermazione simile come super-intuizionistica o metalogica.

Dobbiamo interrompere qui la nostra polemica, anche se sarebbe interessante continuarla. Diciamo dunque che Keplero non si liberò piú del problema delle botti,

e finalmente nel 1615 fece stampare in Linz la sua opera capitale: *Nova Stereometria Doliorum Vinariorum, accessit Stereometriae Archimedae supplementum*, dopo che un editore estremamente cauto di Augusta aveva ricusato di pubblicare l'opera, poiché un argomento tanto "compromettente" non avrebbe potuto essere elevato al rango di scienza neanche da un uomo illustre come Keplero. Malgrado il giudizio dell'editore questa "nuova stereometria delle botti da vino", la quale, come dice il titolo, dovrebbe costituire anche un ampliamento della stereometria di Archimede, è passata tra le opere classiche sotto il nome abbreviato di *Doliometria* o misura delle botti. Il suo contenuto è grandioso: Keplero trova non meno di 92 cubature di solidi di rotazione in piú di Archimede, e a questi solidi, secondo l'aspetto esterno, dà il nome di "meliforme", "limoniforme", "oliviforme", e simili. Piú avanti si occupa delle botti e per la natura stessa della questione arriva a problemi sui massimi, come abbiamo già accennato, nei quali scopre piú nettamente di quanto abbia fatto Nicola d'Oresme che le variazioni di una funzione cominciano a scomparire in prossimità del valore massimo.

Ma purtroppo non possiamo neanche qui soffermarci, dobbiamo invece rivolgerci a un'altra eminente figura di questo periodo, il gesuita Bonaventura Cavalieri, il quale, essendo professore a Bologna, pubblicò nel 1635 la sua famosa *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota.* Cavalieri era allievo di Galilei, e la sua "geometria degli indivisibili" suscitò grande sensazione. D'altra parte già i contemporanei affermavano che all'opera doveva essere assegnato un premio per l'oscurità, se ne esisteva uno. Abbiamo già visto una volta attribuire il titolo di "oscuro" da parte dei contemporanei, e precisamente nel caso di Eraclito. Ciò avvenne press'a poco per gli stessi motivi, a proposito della costituzione dinamica del continuo. Dobbiamo però dire anche oggi, dopo due secoli di

calcolo infinitesimale, che Cavalieri non è effettivamente un campione di chiarezza. Arriva al punto di non dare mai una definizione del suo concetto fondamentale, dei suoi "elementi indivisibili", con che tutta la sua ardita costruzione rimane campata in aria. Perché abbia agito così è ancor oggi un mistero, e al riguardo sono venute a galla ipotesi d'ogni genere, tanto più giustificate in quanto i risultati di Cavalieri, contrariamente al metodo da lui enunciato, sono chiari ed esatti. Molti studiosi ritengono perciò che Cavalieri, il quale era un ecclesiastico, abbia temuto di esporre troppo chiaramente una teoria che poteva forse essere considerata rivoluzionaria, e ciò specialmente dopo quello che era successo a Galilei. Non vogliamo però entrare in tali complicate questioni storiche, osserviamo solo che il soggetto presentava enormi difficoltà per quei tempi, e che dal Rinascimento in poi era diventato abituale annettere maggior valore alla capacità inventiva che al rigore logico. Questo va d'accordo anche con tutto quello che abbiamo già detto a proposito dell' "assorbimento" dei greci. Il modo di agire faustiano era più affine al prometeico e al dionisiaco che all'euclideo e all'apollineo.

Cavalieri concepiva tutte le figure geometriche come assieme di linee o di superfici, a seconda che si trattasse di figure piane o di volumi. Questa "*Summa omnium* etc..." nasce da uno "scorrimento", col passaggio da una linea parallela all'altra, da una superficie all'altra. In un'opera successiva Cavalieri paragona immaginosamente le superfici a stoffe e i volumi a libri. In ogni caso nella prima proposizione del settimo libro della sua geometria degli indivisibili afferma che le figure piane o solide hanno lo stesso contenuto quando le due sezioni condotte alla stessa altezza dànno segmenti o superfici uguali. Questo è il teorema di Cavalieri, che abbiamo appreso a scuola e che sta alla base di ogni misura di superficie o di volume. Il

fatto di aver applicato questo principio per secoli ci ha fatto perdere la sensazione che esso riguarda non solo una pura considerazione infinitesimale, ma che questa considerazione minaccia di cadere da ogni parte dal punto di vista della logica e costituisce un paradosso in sé. Lo si vede da un attacco che fece a Cavalieri Guldino, quel Guldino, da cui prese nome il "teorema di Guldino" (*), benché questo teorema non sia stato scoperto da lui, ma nell'antichità ellenica. Guldino contesta dunque a Cavalieri che, se in un qualsiasi triangolo *ABC* si abbassa l'altezza *BD*, questa divide in generale il triangolo in due triangoli rettangoli disuguali. Se inoltre si tracciano delle parallela alla base e dai punti d'intersezione di queste parallele coi lati del triangolo *AB* e *BC* si costruiscono le perpendicolari alla base *AC*, queste perpendicolari, essendo linee parallele tra parallele, devono essere due a due uguali. Questo si può ripetere all'infinito tracciando infinite parallele, e si trova in ultimo che il triangolo *ABD* si compone delle stesse parti, degli stessi indivisibili, da cui è formato l'altro triangolo di grandezza diversa *BCD*; per cui viene a cadere qualsiasi conclusione, basata sull'assieme degli indivisibili, circa la grandezza finale della "*summa omnium linearum*", cioè della somma di infinite rette (segmenti). Cavalieri rispose nel 1647 nelle *Exercitationes geometricae sex* a questo e ad altri rimproveri, e per quanto riguarda l'attacco da noi citato per esteso, afferma di aver posto espressamente la condizione che gli indivisibili si trovino a due a due alla stessa distanza perché si abbia identità di contenuto. Comunque sia, la questione è tale da dare serie preoccupazioni. Per quanto giusta sia la replica di Cavalieri, altrettanto incontestabile è l'obiezione di Guldino. Ammettendo un'infinità

(*) "Il volume di un solido di rotazione è uguale al prodotto della superficie generatrice per il cammino percorso dal centro di gravità di questa superficie".

attuale, ci troviamo subito in mezzo a contraddizioni e antinomie, e anche la teoria degli aggregati, creata per superare queste antinomie, ci ha fatto cadere di recente, coi lavori di Zermelo, Hausdorff e altri, in paradossi ancora piú ingrati.

Per ragioni di spazio, e dato il carattere della nostra opera, non siamo purtroppo in grado di dare una storia neanche parziale dello sviluppo della matematica infinitesimale. Dobbiamo accontentarci di far notare che dopo Keplero e Cavalieri i matematici non persero piú di vista il problema. Al contrario: una catena quasi ininterrotta di opere si riallaccia a queste prime discussioni, e i nomi di Fermat, Pascal, James Gregory, Wallis stanno in rapporto con questo gruppo di problemi, a proposito dei quali occorre rilevare che all'inglese Wallis spetta la gloria di aver analizzato e risolto il problema del "passaggio al limite", cioè il problema di passare dal finito all'infinito e viceversa.

Dobbiamo spiegare d'altra parte — e questo è uno dei motivi per cui non c'intratteniamo maggiormente su queste particolarità — che si tratta per lo piú di opere speciali riguardanti un solo aspetto del calcolo infinitesimale, cioè il calcolo integrale, con i suoi problemi di quadrature, cubature e rettificazione di curve. Si ha in mente tutto questo lavorío quando si afferma che tanto Newton come Leibniz non avevano effettivamente da scoprire il calcolo infinitesimale, perché il calcolo era già bell'e pronto. Certo, il pensiero dell'integrazione esisteva, e fino dai tempi di Archimede. Vi è però qualche cosa di piú di una semplice differenza superficiale quando fino a Newton e Leibniz occorrono interi volumi per calcolare alcuni casi particolari di integrazioni, mentre poi viene creato un metodo affatto generale, che ci permette di affrontare con sicurezza qualsiasi problema del genere. Ci troviamo perciò davanti a una differenza sostanziale che

corrisponde in un certo modo alla differenza tra le "coordinate" di Apollonio e quelle di Descartes.

Abbiamo nominato spesso insieme Newton e Leiniz, come se si trattasse di una scoperta fatta in comune, Con quella "e" sfioriamo però una delle piú intricate questioni di priorità della storia delle scienze. Anche recentemente matematici di tutta serietà, come Eneström, hanno sostenuto che la questione non era risolta e lasciato sussistere la cattiva luce nella quale è stato messo Leibniz per due secoli. In questo capitolo dovremo perciò procedere con speciale cautela e precisione, per mettere in evidenza le cose veramente essenziali e illustrare l'assurdità di questa lotta. A tale scopo non basta porsi obbiettivamente il problema, ma bisogna cercare anzitutto di penetrare la personalità stessa di Leibniz.

Leibniz era figlio di uno stimato professore d'università, e nacque a Lipsia nel 1646, due anni prima della pace di Westfalia, con la quale ebbe termine la guerra dei trent'anni. Dimostrò fin dalla prima giovinezza straordinarie doti intellettuali, che non vennero però apprezzate nella sua città natale, ragione per cui studiò legge all'università di Norimberga, dove fu accolto piú favorevolmente. Là fece conoscenza con un uomo politico, il barone Boineburg, e questo ebbe influenza decisiva sul suo destino. Entrò da principio al servizio del barone, poi al servizio dell'elettore di Magonza, suo signore, e nel 1672 si recò a Parigi in missione diplomatica. Qui s'introdusse presto nel centro della vita intellettuale, conobbe il fisico e matematico Huygens, le opere di Pascal e di Descartes, e in occasione di un viaggio in Inghilterra anche diversi famosi matematici inglesi. Per quanto queste circostanze esteriori abbiano influito su di lui, fu piuttosto, secondo noi, l'intima natura di Leibniz a produrre il miracolo delle sue scoperte. I tempi erano maturi per osare l'ultima battaglia dell'algoritmo, specialmente per un

Leibniz che già da giovinetto aveva sognato una "caratteristica generale", un calcolo logico che, a guisa di macchina pensante, ponesse in grado di ottenere automaticamente una risposta a qualsiasi domanda. Una "*Cabbala vera*", un' "*arte lullica*", avrebbe dovuto guidarci, un' "*ars inveniendi*" e un' "*ars combinatoria*", cioè un'arte inventiva specifica e un'arte meccanica combinatoria. Vediamo qui per la prima volta l'ideale algoritmico definito con tutta generalità e con piena consapevolezza, secondo un piano tenacemente perseguito e realizzato in breve tempo in piú di un'opera.

Ripetiamo ancora per maggior chiarezza: Leibniz, appena uscito dall'adolescenza, non mirava affatto a diventare un matematico. Era piuttosto divorato dalla sete del sapere universale e anche da quella smania di agire che lo spinse ad aver parte nei destini politici della Polonia e gli dette l'ardire di suggerire a Luigi XIV una spedizione in Egitto, a tutto beneficio della sicurezza dei tedeschi. Leibniz fino a quest'epoca si occupava quasi esclusivamente di filosofia e di legge, fors'anche di storia, di chimica, di fisica e di teologia. Ma però l'enorme varietà dello scibile, lo studio della scienza già acquisita, non gli bastavano. Voleva di piú, molto di piú. E, come il Faust di Goethe apre il "vecchio libro di Nostradamo" e associa alla magia la sua sete di conoscenza, cosí il giovane Leibniz, la piú faustiana di tutte le menti, andava cercando la vera cabala. Istruito ed esperto nella letteratura antica e nella scolastica, evocava lo spirito di Raimondo Lullo, nel quale credeva di aver trovato un chiaro suggerimento sulla via da prendere. Doveva essere possibile — questa era la convinzione di Leibniz — ottenere nel modo piú generale le cose piú complesse mediante combinazione di tutte le cose semplici, col vantaggio che nulla sarebbe potuto sfuggire adottando questo sistema sintetico d'indagine.

È evidente che Leibniz, anche prima di recarsi a

Parigi, aveva qualche conoscenza elementare della matematica. Tuttavia, e questo è provato, molto elementare. È piú che comprensibile perciò che a Parigi sia stato còlto da una specie di ebbrezza mentale quando vide quanto materiale già pronto veniva incontro al suo disegno. La matematica superiore, specialmente l'algebra cartesiana, i logaritmi, l'analisi, i tentativi di sviluppo in serie, gl'indivisibli di Cavalieri, i numeri immaginari, tutto ciò doveva fargli l'effetto di una rivelazione. Egli stesso racconta il fremito che lo assalí quando trovò che $\sqrt[3]{1+\sqrt{-3}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$, e ci dice in parole chiare e semplici in che modo mostrò questo risultato a Huygens, il quale ne rimase assai stupito. Ma sotto quelle parole si sente l'emozione che un simile avvenimento doveva suscitare in Leibniz. Qui, davanti ai suoi occhi, stava la conferma di ciò a cui aveva mirato tutta la vita: l'algoritmo, la macchina pensante aveva fatto sí che la somma di due radici di "numeri complessi", come diciamo oggi, cioè la somma di due espressioni incomprensibli e inesprimibili, desse un risultato ancora irrazionale, ma innegabilmente reale e concreto.

Leibniz edificò il suo algoritmo in triplice modo. Anzitutto con l'invenzione della macchina calcolatrice, i cui particolari costruttivi essenziali stanno ancor oggi alla base delle macchine calcolatrici moderne. Leibniz non ne fu il primo ideatore, ma sviluppò in parte idee di Pascal, benché la sua macchina fosse molto piú perfezionata della costruzione di Pascal, che non era in grado di funzionare. Prescindiamo qui dall'utilità pratica della macchina calcolatrice, vogliamo solo far rilevare che essa fu come il simbolo della passione algoritmica di Leibniz, tramutata in meccanismo d'acciaio. Anche nella macchina un'arte combinatoria nascosta, un ingranaggio costruito una volta per sempre,

eseguivano il calcolo. Tra il quesito e la soluzione interveniva il meccanismo automatico, il ponte di passaggio dell'algoritmo. Questo primo grande trionfo che confermava in modo visibile quello a cui Leibniz tendeva, lo infiammò a nuove imprese. Si provò in un secondo meccanismo, assai piú complicato, che doveva essere l'equivalente aritmetico del "metodo di esaustione" degli antichi. Questa vittoria sui numeri irrazionali e trascendenti, che si erano voluti attaccare con le frazioni decimali, poteva avvenire solo mediante le serie. È perciò proprio in armonia con l'indirizzo mentale di Leibniz di aver perfezionato l'algoritmo delle serie, quando s'imbatté in problemi di questo genere. Benché qui pure siano state sollevate altre pretese di priorità, è noto che Leibniz scoprí durante il suo soggiorno a Parigi la serie che ancor oggi porta il suo nome. Questa cosiddetta "serie di Leibniz", che deriva da uno sviluppo in serie della funzione dell'arcotangente, dà per $x = 1$ un valore di $\frac{\pi}{4}$ pari a $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots$ Essa non si presta in modo speciale per l'effettivo calcolo di π, ma ciò non toglie nulla al suo valore d'indagine nella struttura di queste funzioni.

Abbiamo pronunziata diverse volte la parola "funzione". Questo concetto fu il terzo compito al quale si dedicò Leibniz durante la sua permanenza a Parigi. Dietrich Mahnke, nel suo lodevole lavoro *Zur Keimesgeschichte der Leibnizschen Differentialrechnung*, dice che Leibniz nel 1673 era già cosí avanti da riconoscere nel suo grande trattato *Methodus tangentium inversa seu de functionibus* l'equivalenza del problema reciproco della tangente con quello delle quadrature e delle rettificazioni, e da contrapporre queste — quali sommatorie infinitesimali — ai problemi ordinari delle tangenti, che

sono una stessa cosa con la formazione dei differenziali infinitesimali. In questo trattato introdusse anche l'espressione "*functionem faciens*", o piú brevemente "*functio*", per le grandezze variabili secondo una certa legge, come per esempio tangenti, normali, sottotangenti, sottonormali o altri segmenti che esercitano una "funzione" rispetto a una curva. Per esempio la toccano, la tagliano perpendicolarmente ecc., e, procedendo con la curva, stanno in un rapporto variabile con l'ascissa e l'ordinata della stessa. Fin qui Mahnke. Spiegheremo ora in modo accessibile a tutti questo punto ricco di conseguenze.

Leibniz sapeva dunque fino dal 1673 che il calcolo infinitesimale doveva consistere di due gruppi di problemi distinti l'uno dall'altro, e cioè del problema della tangente "inverso" e di quello "ordinario". Il problema inverso equivaleva alle quadrature e alle rettificazioni, il problema ordinario equivaleva alla costruzione di differenziali di grandezze infinitamente piccole. Che cosa significa questo? Per rispondere alla domanda dobbiamo richiamarci alla scoperta, o meglio invenzione, delle coordinate. Con questo sistema di riferimento la curva si esprime per mezzo di un'equazione, e si può ora domandare in due modi diversi, come ha già fatto Roberval, in che modo possiamo concepire che la curva venga generata dalla tangente. Si può cioè domandare una prima volta a quale legge generale di direzione deve soddisfare la tangente affinché in ogni punto della curva, cioè per qualsiasi valore a piacere x dell'ascissa, si possa ricavare da una formula che valga in generale per ogni punto. Questo è il problema diretto della tangente, il quale, come dice Leibniz, si presenta aritmeticamente parlando come formazione di differenze infinitesimali, poiché noi, per ottenere la formula, dobbiamo paragonare un punto della curva col punto precedente o col successivo. Se premettiamo inoltre come condizione essenziale che la curva abbia un andamento

continuo e regolare, il confronto tra punti vicini deve rivelare la legge di variazione della direzione come legge della tangente che inviluppa la curva. Se ora immaginiamo (e questo è il problema "inverso" della tangente) di conoscere già questa formula mediante la quale è possibile ottenere la tangente in un certo punto

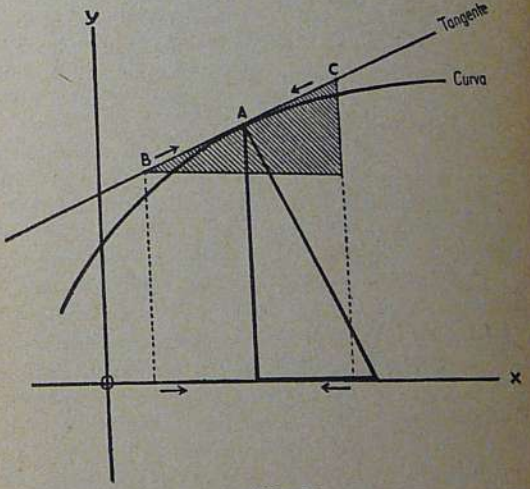


FIG. 7

e rispettivamente la variazione della sua inclinazione, deve esserci anche possibile con un metodo di calcolo adeguato ottenere dalla formula della tangente l'equazione sconosciuta della curva, che oggi noi chiamiamo funzione primitiva. L'equivalenza di questa operazione con la quadratura e con la misura della lunghezza della curva o rettificazione fu un lampo di genio di Leibniz, che non risulta ancora dal solo enunciato del problema.

Malgrado questa chiarezza di visione, Leibniz ebbe bisogno di diversi anni per passare dall'idea ai fatti.

I fatti in questo caso non significavano altro che trovare o creare uno speciale algoritmo, o per lo meno una notazione adeguata, e in ciò egli fu aiutato da un'altra scoperta. Per le sue illustri doti matematiche era stato pregato dagli amici di Pascal di vagliare e pubblicare l'eredità lasciata da questo grande; nell'assolvere tale compito gli venne per le mani un disegno rappresentante l'andamento della funzione sinusoidale nel primo quadrante. Nella mente già preparata di Leibniz questo disegno si generalizzò, fino a che egli vi riconobbe il cosiddetto "triangolo caratteristico", riprodotto nella figura.

Il processo mentale di Leibniz è il seguente. Una tangente che tocca la curva nel punto *A*, nei punti *B* e *C* dista già ovviamente dalla curva per un buon tratto. Se consideriamo *B* e *C* come punti estremi dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, i cui cateti sono paralleli agli assi coordinati, questo triangolo è simile al triangolo formato dalla normale alla tangente, da un segmento dell'asse delle ascisse e da una parallela all'asse delle ordinate. Nella nostra fig. 7 esso è stato messo in evidenza ingrossandone i lati. Perciò, in breve, il triangolo tratteggiato è simile al triangolo a linee piú grosse. Immaginiamo ora che i punti *B* e *C* si avvicinino sempre piú ad *A*, muovendosi nel senso indicato dalle frecce. Il triangolo tratteggiato s'impiccolirà sempre piú, senza però cambiare di forma, in altre parole rimarrà sempre simile al triangolo a linee grosse. Questa contrazione non ha limite: si può spingere fin dove si vuole facendo avvicinare *B* e *C*, e non si sa qual è il momento in cui il triangolo sparisce dalla vista, col coincidere di *B*, *A* e *C* in un unico punto. Si domanda ora Leibniz: il triangolo tratteggiato ha cessato di esistere? Si può rispondere affermativamente a questa domanda, poiché un triangolo non è piú tale quando i vertici si trovano uno sull'altro, quando cioè non vi è piú la possibilità di tracciare i

lati. Non si concepisce tuttavia facilmente questo sparire improvviso, quando si ha come premessa la continuità della linea. Non sarebbe piú logico, da un altro punto di vista, ammettere che il triangolo è bensí scomparso, ma che le sue proprietà sono rimaste? Sappiamo bene fin dal tempo degli antichi greci, specialmente dopo Euclide, che le proporzioni non hanno nulla a che vedere con le grandezze assolute. Ora il riangolo tratteggiato, per quanto piccolo si sia ri-

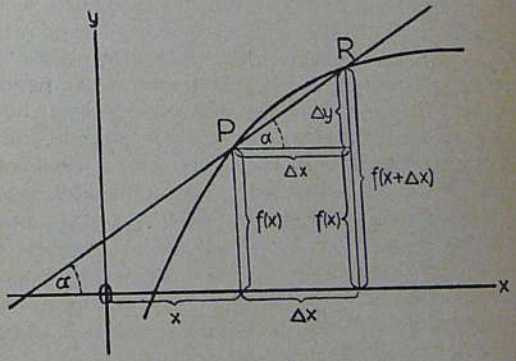


FIG. 8

dotto, ha sempre mantenuto le proporzioni del triangolo a linee grosse, essendo simile a questo. Siamo perciò autorizzati ad ammettere — e questo è il coronamento della scoperta di Leibniz — che il triangolo tratteggiato è bensí scomparso, ma che le sue proporzioni continuano a sussistere davanti ai nostri occhi, visibili e misurabili, nel triangolo a tratto grosso chiamato triangolo "caratteristico". Si può ora esprimere la legge della tangente in ogni punto mediante un rapporto tra i lati del triangolo caratteristico, oppure — che è lo stesso — mediante una funzione angolare del-

l'angolo d'inclinazione della tangente. Come si fa però a trovare in generale questa funzione, e soprattutto a metterla in relazione con l'equazione della curva? Leibniz, come sappiamo, percorre la via del calcolo delle differenze che egli, mediante il passaggio al limite, trasforma in calcolo differenziale. Come fondamento di tutto il calcolo differenziale basta un'unica formula, entrata nella storia della scienza sotto il nome di "formula di Leibniz". Se infatti immaginiamo che l'ascissa x aumenti, allora aumenta anche l'ordinata y, quando si tratta di una curva ascendente. Nel caso che sia discendente si dovrebbero fare considerazioni alquanto diverse, ma non vi sarebbe nulla di essenzialmente mutato. Rimane quindi stabilito che quando noi aumentiamo la x di una quantità ancora finita Δx, anche la y cresce di una quantità Δy. Disegnamo un'altra figura che è parente stretta del triangolo caratteristico. Vediamo da questa che con gli aumenti finiti si ottiene solo l'angolo d'inclinazione α della secante alla curva che passa per P ed R, formando la funzione della tangente dal rapporto di Δy e Δx. Δy però non è altro che il valore della funzione che corrisponde all'ascissa $(x + \Delta x)$ diminuito del valore nel punto x, poiché la funzione $y = f(x)$ diventa, in $(x + \Delta x)$, $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Possiamo perciò dire che la tangente dell'angolo α oppure, il che fa lo stesso, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ è uguale a $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, ossia: la differenza tra la funzione accresciuta dell'aumento e la funzione data, divisa per l'aumento di x, rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo d'inclinazione della secante che passa per P ed R. Poiché noi però vogliamo conoscere non la secante ma la tangente nel punto P, dobbiamo assumere un aumento infinitamente piccolo dx. Ora perciò non cerchiamo piú l'angolo α; ma l'angolo α', che

possiamo ottenere identicamente al caso delle differenze. Infatti in questo caso l'angolo d'inclinazione della tangente rispetto all'asse delle ascisse può essere anch'esso espresso mediante la tangente trigonometrica.

La tangente di α' è $\frac{dy}{dx}$ e dy si ottiene, in modo puramente algoritmico, dalle due equazioni $y = f(x)$ e $y + dy = f(x + dx)$ ossia $f(x) + dy = f(x + dx)$, da cui $dy = f(x + dx) - f(x)$ e $\frac{dy}{dx} = \text{tg}\alpha' = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$.

Siamo andati un po' troppo avanti, poiché lo stesso Leibniz non scrisse così subito queste equazioni come abbiamo fatto noi. Ma abbiamo riprodotto la prima scoperta nella sua sostanza, anche se ci siamo serviti di una scrittura posteriore. Come abbiamo detto, con questa formula di Leibniz era bell'e trovato l'algoritmo del problema "diretto" della tangente e bastava ora ricavare le regole singole per adoperare bene la formula. Spiegheremo la cosa con un semplice esempio. Sia data per esempio la parabola $y = x^2 - 7$ e si cerchi la legge della tangente o del "quoziente differenziale" di questa parabola in ogni punto. Secondo la formula di Leibniz, è

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[(x + dx)^2 - 7] - [x^2 - 7]}{dx} =$$

$$= \frac{[x^2 + 2xdx + (dx)^2 - 7] - [x^2 - 7]}{dx}$$

e, liberando dalle parentesi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2xdx + (dx)^2 - 7 - x^2 + 7}{dx} = \frac{2xdx + (dx)^2}{dx}.$$

Ora si deve eseguire il cosiddetto passaggio al limite, cioè considerare quali delle grandezze infinitesime che figurano nell'equazione abbiano importanza per il calcolo. Infatti la stessa espressione si sarebbe potuta ricavare anche come quoziente di differenze finite, nel

qual caso si otterrebbe per $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ il valore $(2x + \Delta x)$ come tangente trigonometrica dell'angolo formato dalla secante alla curva. Questo passaggio al limite si può effettuare in due modi: o calcoliamo prima il quoziente delle differenze e diciamo che $(2x + \Delta x)$ col ridursi di Δx a dx, cioè per un aumento infinitamente piccolo, diventa semplicemente $2x$, dato che l'aggiunta di una grandezza infinitamente piccola a una grandezza finita la lascia invariata, quindi $\frac{dy}{dx} = 2x$; oppure calcoliamo fin da principio coi differenziali, e diciamo che, nella formula $\frac{2xdx + (dx)^2}{dx}$, $(dx)^2$ è un "infinitesimo di secondo ordine", che si comporta rispetto a dx come dx rispetto a x. Siamo perciò autorizzati a trascurare questo infinitesimo e otteniamo ora $\frac{2xdx + (dx)^2}{dx} = \frac{2xdx}{dx} = 2x$, cioè nuovamente lo stesso $2x$ come quoziente differenziale di $y = x^2 - 7$. Leibniz cercò una volta di rendere plasticamente il concetto di questo infinitesimo di ordine superiore, dicendo che il firmamento sta alla Terra come la Terra sta a un granello di polvere, e la Terra sta a un granello di polvere come questo sta a una particella magnetica. (Oggi chiameremmo elettrone la "particella magnetica" profetizzata da Leibniz.) Secondo Leibniz, x sarebbe il firmamento, dx la Terra, $(dx)^2$ il granello di polvere e $(dx)^3$ la "particella magnetica". Sarà certo sufficiente se, oltre al firmamento o universo, si tien conto anche di questo nulla che è la Terra. Considerare anche il granello di sabbia o la "particella magnetica" sarebbe tanto piú fuori luogo, in quanto già la Terra, cioè dx, può essere considerata come infinitamente piccola rispetto all'universo.

Dobbiamo però interrompere qui la spiegazione del-

lo speciale algoritmo leibniziano. Aggiungiamo ancora che Leibniz non solo riuscí in breve tempo a differenziare le funzioni piú semplici e le loro combinazioni, ma già mentre si trovava a Parigi calcolò quozienti differenziali di ordine superiore, cioè differenziali di differenziali, di grande importanza dal punto di vista fisico, perché per esempio il primo quoziente differenziale (o derivata prima) rappresenta la velocità, e il secondo la variazione della velocità o accelerazione. Le derivate di ordine superiore sono pure indispensabili per rispondere alla domanda se il valore per cui la derivata prima si annulla rappresenta un massimo o un minimo.

Per la storia della scienza è una fortuna che Leibniz avesse l'abitudine di annotare e datare esattamente le tappe piú importanti delle sue ricerche. Sappiamo cosí che il 29 ottobre 1675, a Parigi, era già arrivato ad avere piena consapevolezza del suo calcolo. Scriveva infatti sotto questa data: "Sarà utile, al posto delle totalità di Cavalieri, cioè invece di somma di tutte le y, scrivere d'ora innanzi $\int y dy$. Qui si vede finalmente la nuova specie di calcolo, la nuova operazione che corrisponde all'addizione e alla moltiplicazione. Se viceversa è dato $\int y dy = \frac{y^2}{2}$ si presenta subito il secondo calcolo risolutivo, che da $d\left(\frac{y^2}{2}\right)$ riproduce y. Come infatti il segno $\int$ accresce la dimensione, cosí la d la riduce. Il segno $\int$ significa una somma, la d una differenza".

Con queste scoperte era creato l'algoritmo dell'analisi infinitesimale, che doveva presto conquistare il mondo e conservare fino a oggi il suo predominio.

È difficile dire in quale campo Leibniz sia stato piú geniale. Non vi è il minimo dubbio che egli fosse un genio della scrittura esatta e adeguata, della notazione matematica. L'introduzione di nuovi concetti e di nuovi segni è avvolta in un mistero imperscrutabile: solo pochi di questi concetti o segni sono cosí "giusti", di portata cosí generale, da entrare nell'uso comune. Una volta introdotti dimostrano però una enorme forza d'inerzia, come se si trattasse di oggetti di natura e non di semplici convenzioni. Una piccola parte del mistero si può intravvedere, quando si tratta di nuovi "segni". Questi devono potersi inserire in qualche modo nella tradizione, devono adattarsi formalmente ed esteticamente al cosmo matematico. In un organismo vivente come è la matematica non si può arbitrariamente innestare un qualsiasi organo artificiale, oppure pretendere che un "ordine" sia indicato in modo esauriente per esempio con un solo puntino, mentre per eseguirlo occorrono operazioni difficili e inconsuete. Un ordine come x^3 è assai chiaro. Ci ricorda subito $3x$ e col 3 ad esponente ci mostra che si tratta di qualche cosa di piú "elevato" di $3x$ o $x + x + x$. Significa infatti $x \,.\, x \,.\, x$. Come poteva un uomo del secolo decimosettimo figurarsi che Newton con $\dot{x}$ indicasse una operazione cosí complicata come la formazione del quoziente differenziale? E con $\dot{x}$ l'integrale di x? Perfino nei libri stampati oggi, con ogni raffinatezza, nei quali la notazione di Newton viene data come curiosità storica, spesso il punto sulla x è omesso, e questo punto appare al non iniziato come un'imperfezione di stampa, un difetto della carta e simili. Ma vi è ancora dell'altro da criticare. In Newton la struttura del calcolo non viene messa in evidenza, non si vede minimamente l'ingranaggio dell'algoritmo. In Leibniz avviene tutto il contrario.

Ci sia permesso di chiarire questa notazione in una maniera piuttosto semplificata e attaccabile da un pun-

to di vista rigoroso. Correggeremo piú tardi il nostro errore; affermiamo però — e questo "però" ha la sua importanza — che proprio la rappresentazione volgare dell'infinitamente piccolo è quella che solleva il lato puramente concettuale e imperscrutabile dell'algoritmo ad un'assai piú facile comprensione. Non parliamo dunque piú del rapporto di grandezze infinitamente piccole, ma ingrandiamole singolarmente con un microscopio magico e chiamiamole "differenziali". Per noi dx è una lunghezza, cosí pure dy, e il segno d'integrale, che è solo una S (somma) allungata e ristretta, significa che l'integrazione è una somma continua di successivi termini infinitesimi. Con ciò otteniamo subito una chiara visione del meccanismo del calcolo infinitesimale. Se per esempio è data l'equazione $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, della quale noi non sappiamo ancora che significa il quoziente differenziale, o la "derivata" della funzione, possiamo anche scrivere, semplicemente applicando le regole delle equazioni, $f'(x)\,dx = dy$ oppure $dy = f'(x)\,dx$. Sappiamo inoltre che un'equazione non varia eseguendo la stessa operazione sui due membri. Chiediamoci ora arditamente, seguendo le orme di Cavalieri, di costruire dai due lati la "*summa omnium linearum*". Secondo quanto Leibniz ritiene "utile", non scriveremo Omnia dy - Omnia $f'(x)\,dx$, ma semplicemente $\int dy = \int f'(x)\,dx$. Ma la somma di tutte le dy, è nient'altro che la somma di tutti gli aumenti della funzione da o a x, cioè l'ordinata estrema del "campo" considerato. Perciò $\int dy = y = \int f'(x)\,dx$. Ma $y = f(x)$, ossia la funzione primitiva, e quindi $f(x) = \int f'(x)\,dx$, o anche: l'integrale della derivata di una funzione è ancora la funzione primitiva. In questo la dx, che completa l'integrale, ha

un compito di singolare importanza: essa non è altro che il fattore distributivo che forma con ciascun valore del quoziente differenziale $y' = f'(x)$ i rettangoli elementari di cui si compone l'area. La dx sarebbe perciò il "passo" o la distanza tra le singole ordinate. Abbiamo finora taciuto di proposito che il quoziente differenziale non è altro che il rapporto dei cateti infinitamente piccoli del triangolo tratteggiato della fig. 7, quando esso si restringe sempre piú. L'ipotenusa di questo triangolo infinitesimo è il tratto nel quale la curva e la tangente s'identificano cioè il tratto "rettificato" della curva. Indicando con ds possiamo scrivere per il teorema di Pitagora che $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. Essendo $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, la somma di tutte le ds, cioè $\int ds$, è equivalente alla lunghezza della curva. Dalla $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ si ha perciò la lunghezza della curva $s = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, risultato al quale vanno collegate numerose altre considerazioni.

In questo modo si presenta la relazione che passa tra calcolo differenziale e calcolo integrale quando si parte dal quoziente differenziale. Se viceversa si parte dall'integrale, come fece Leibniz nella sua famosa memoria, e si considera come dato $\int y dy = \frac{y^2}{2}$ si trova allora che $d\left(\frac{y^2}{2}\right)$, cioè il quoziente differenziale dell'operazione d'integrazione, riconduce di nuovo alla stessa y che sta sotto il segno d'integrale.

Non è nostro compito e neanche nostro desiderio quello di scrivere un trattato di calcolo infinitesimale. Volevamo solo far vedere con quanta semplicità e facilità la notazione di Leibniz s'innesta negli algoritmi già esistenti e mettere in rilievo la sua cristallina chia-

rezza. Il differenziale non poteva sfuggire in nessun caso. Era presente di continuo nel calcolo, ingrandito al microscopio, e rimaneva con ciò sotto controllo. E non accadde quasi mai a Leibniz di sbagliare, come avvenne invece di frequente allo stesso Newton nel caso di derivate di ordine superiore, da lui indicate con $\ddot{x}$, $\dddot{x}$ ecc., perché malgrado ogni virtuosismo personale, arrivati a un certo punto non era piú possibile dominare la macchina. *Il calcolo infinitesimale di Newton sta a quello di Leibniz come l'algebra in parole sta all'algebra scritta algoritmicamente.* Questo non sarà mai abbastanza ripetuto, se si vuole mettere in evidenza la sostanza o piuttosto la futilità di ogni discussione sulla priorità di Newton o di Leibniz — a parte il fatto che, oltre questa distinzione, vi sono anche altre importanti diversità concettuali.

A questo punto, prima di cercare di ottenere una visione generale sul mondo matematico di Leibniz, riferiremo a semplice titolo storico che Leibniz pubblicò il suo calcolo differenziale nel 1684, nella rivista *Acta eruditorum* da lui fondata, come applicazione a problemi di massimi e minimi. In questo lavoro vengono anche introdotti definitivamente i due punti come segno di divisione. Leibniz si era deciso a rivelare il suo metodo solo nove anni dopo la scoperta perché un suo amico, il geniale e avventuroso Walter Ehrenfried conte di Tschirnhaus, aveva già cominciato a pubblicare come proprie le scoperte confidategli da Leibniz, nelle quali tuttavia finí per smarrirsi. Questo Tschirnhaus era un uomo eccezionale, un carattere impetuoso ed esuberante. Diciamo anche incidentalmente che riuscí ad ottenere uno dei migliori metodi di risoluzione delle equazioni cubiche.

Con la pubblicazione del metodo di Leibniz il segreto dell'analisi infinitesimale fu rivelato una volta per sempre. Collaboratori geniali, come Giovanni e Giacomo Bernoulli, Varignon, il conte d'Hospital e

altri, s'impadronirono del calcolo, e in pochi anni lo svilupparono talmente, che oggi studiando le loro opere passiamo di meraviglia in meraviglia. Furono percorse tutte le possibili vie, fino al calcolo delle variazioni, una delle branche piú elevate dell'analisi infinitesimale, benché le fondamenta di questa fossero appena gettate. Si riesce a mala pena a comprendere come i due Bernoulli abbiano fatto a valutare gl'integrali piú complicati. Il calcolo delle variazioni, sia detto di passaggio, si propone il problema di analizzare le proprietà di massimo e minimo non di singoli punti di una curva, ma di funzioni come tali. Un problema di questo tipo è per esempio quello della "brachistocrona". Si deve trovare una curva — questo è il quesito posto da Giovanni Bernoulli ai matematici — sulla quale una massa puntiforme soggetta solo alla forza di gravità si muove nel piú breve tempo passando da un punto piú elevato di un piano verticale ad un punto inferiore dello stesso piano che non si trovi sulla stessa verticale. La soluzione, data concordemente da Leibniz, L'Hospital, Newton e i due Bernoulli, rivelò che questa curva è una cicloide. E Giacomo Bernoulli scoprí inoltre la legge fondamentale che questa "brachistocrona" poteva soddisfare nella sua totalità alla condizione posta, solo se la condizione si verificava per ogni tratto infinitesimo della curva. Perciò ogni "elemento di curva" doveva essere percorso dal punto in un tempo minimo.

Non vi è da meravigliarsi che tosto prendessero la parola vivaci oppositori del nuovo metodo, benché il calcolo di Leibniz avesse mostrato piú volte in modo evidente la sua esattezza, e ciò anche in occasione del "problema fiorentino". Un allievo di Galilei, Viviani, aveva infatti sfidato Leibniz a trattare un certo problema che egli stesso aveva risolto secondo i principî di Archimede. Leibniz arrivò subito alla stessa soluzione mediante il suo nuovo calcolo e Giacomo Ber-

noulli dimostrò per di piú che erano possibili infinite soluzioni. Il problema riguardava l'intersezione di una cupola con un cilindro. Tolte le finestre risultanti, la rimanente superficie della cupola doveva essere quadrabile razionalmente. Nelle critiche a cui abbiamo accennato sopra, che neanche risultati come la soluzione del "problema fiorentino" riuscivano a far tacere, ebbe parte anche molta incomprensione intenzionale o involontaria, che sopravvisse poi nella contesa per la priorità tra Leibniz e Newton. Leibniz agli occhi dei contemporanei era quasi un truffatore, un ladruncolo intellettuale e un ciarlatano; uno di quei fabbricatori d'oro, cortigiani intriganti e avventurieri sul tipo del consigliere Becher. Poiché nell'età barocca in cui visse vi furono alcune di queste figure, al grande Leibniz non servivano a nulla tutti i titoli, gli onori e le distinzioni. Si diceva "paradossi infinitesimali", e si voleva intendere la rivalità tra l'Inghilterra e la Germania o la lotta partigiana tra *whigs* e *tories*. Qui bisogna riconoscere che i popoli latini furono risolutamente dalla parte di Leibniz, e gli resero giustizia prima dei suoi compatrioti. Solo la morte gl'impedí di chiudere la vita come emigrato a Vienna o piú probabilmente a Parigi, progetto che sarebbe stata la migliore risposta al contegno delle singole nazioni verso di lui, se avesse potuto essere effettuato.

Come abbiamo detto piú volte, non è nostro compito analizzare in modo esauriente i principî del calcolo infinitesimale. Dovevamo d'altra parte spiegare con qualche esempio alcuni principî fondamentali, altrimenti non avremmo potuto mettere nella giusta luce i meriti di Leibniz proprio in questo campo. Aggiungiamo un particolare: Leibniz introdusse il simbolo d'integrale, ma il nome "integrale" fu inventato da Giacomo Bernoulli. L'unione dei due grandi talenti matematici di Leibniz e Bernoulli fece sí che in seguito venisse adoperato il segno di Leibniz insieme all'espressione

"integrale" coniata da Bernoulli, e questa convenzione è rimasta valida fino ad oggi in tutto il mondo.

Prima di citare altri meriti di Leibniz nello sviluppo della matematica, meriti che portarono realmente a piena maturità quello che noi intendiamo con l'espressione di "universo matematico", dobbiamo combattere un'opinione errata, ancor oggi molto diffusa: che cioè Leibniz, con ingenuità filosofica, o in base alla sua celebre teoria delle monadi, che del resto viene spesso e volentieri svisata o mal compresa, si sia messo allegramente a trattare i differenziali alla stregua di atomi matematici e sia perciò scivolato inconsciamente in errori grossolani e contraddizioni, che non avrebbero potuto sostenere le critiche di uno Zenone d'Elea.

Noi non solo affermeremo, ma dimostreremo che è vero proprio il contrario. Certo, Leibniz ha parlato spesso in linguaggio approssimato, onde volgarizzare le sue ardite concezioni per i matematici meno dotati dal punto di vista filosofico. Questo linguaggio non aveva però la pretesa di essere usato per una discussione scientifica, ma per opportunismo pedagogico e politico. Quando il già citato fisico e matematico Varignon, che fu il primo ad enunciare la legge generale del parallelogramma delle forze, richiamò amichevolmente la sua attenzione sulle discussioni e le critiche sollevate in Francia da alcune sue affermazioni, Leibniz rispose il 2 febbraio 1702 con le seguenti esplicite parole: "Sono molto grato a Voi, Signore, e ai dotti del Vostro paese, dell'onore che mi fate con le Vostre riflessioni su una lettera da me inviata a un amico in risposta ad alcune obiezioni sollevate nel 'Journal de Trevoux' al calcolo differenziale e sommatorio. Non ricordo piú le espressioni che posso aver adoperate, la mia intenzione però era di mostrare che non è necessario far dipendere l'analisi matematica da disquisizioni metafisiche, cioè non occorre affermare che in natura esistono delle linee le quali rispetto alle comuni

sono in modo rigoroso infinitamente piccole, né altre infinitamente grandi. E appunto per evitare queste sottili discussioni mi sono accontentato, volendo rendere comprensibili a tutti le mie considerazioni, di spiegare l'infinito con ciò che non ammette confronto, cioè di assumere grandezze incomparabilmente maggiori o minori delle nostre abituali. In questo modo si ottengono molti gradi di grandezze tra loro inconfrontabili, in quanto un elemento incomparabilmente piú piccolo quando si tratta di determinarne uno incomparabilmente piú grande, può essere trascurato nel calcolo. Cosí per esempio, una particella magnetica che attraversa il vetro non è confrontabile con un grano di sabbia, né questo a sua volta col globo terrestre, né infine la Terra col firmamento. Perciò negli *Acta eruditorum* ho già posto alcuni enunciati riguardanti le grandezze inconfrontabili, che si possono adoperare tanto per le grandezze infinitamente grandi quanto per quelle grandezze che, commisurate ad altre, non vengono prese in considerazione.

"Vi è però da osservare" seguita Leibniz nella lettera citata "che le grandezze incomparabilmente piccole, anche nel senso volgare, non sono in alcun modo costanti e determinate, poiché esse, anzi, potendo essere supposte piccole a piacere, nelle considerazioni geometriche hanno lo stesso ruolo degli infinitesimi in senso rigoroso. Se pertanto un oppositore contesta l'esattezza delle nostre affermazioni, il nostro calcolo dimostra che l'errore è inferiore a qualsiasi grandezza data, essendo sempre in nostra facoltà ridurre sufficientemente a tale scopo l'incomparabilmente piccolo, che si può del resto supporre piccolo come si vuole. Ciò potrebbe ben essere quello che Voi intendete come inesauribile, e senza dubbio qui sta la dimostrazione rigorosa del nostro calcolo infinitesimale. Il suo vantaggio consiste nel dare direttamente e visibilmente, e in maniera tale da mettere in evidenza la fonte

effettiva della scoperta, gli stessi risultati raggiunti per vie traverse dagli antichi, per esempio Archimede, con la dimostrazione indiretta. Inoltre gli antichi, in mancanza di un tale calcolo, non arrivarono nei casi complicati alla soluzione esatta, pur conoscendo le basi da cui partire per ulteriori scoperte. Si possono dunque tranquillamente adoperare le linee infinitamente grandi o piccole — anche se metafisicamente parlando non se ne ammette l'esistenza come oggetti reali — alla stregua di concetti astratti, per mezzo dei quali il calcolo risulta abbreviato, analogamente alle cosiddette radici immaginarie dell'analisi ordinaria, come per esempio $\sqrt{-2}$. Chiamiamole pure radici immaginarie, esse sono ugualmente utili e talvolta perfino indispensabili per esprimere grandezze reali in modo analitico. Cosí ad esempio non è possibile dare, senza il loro aiuto, l'espressione analitica di una retta che divide un dato angolo in tre parti uguali. Analogamente non si potrebbe istituire il nostro calcolo delle curve trascendenti senza parlare di differenze che sono sul punto di scomparire, introducendo una volta per sempre il concetto dell'incomparabilmente piccolo, invece di parlare di grandezze suscettibili di rimpicciolirsi indefinitamente. Allo stesso modo si concepiscono piú di tre dimensioni e le potenze con esponenti immaginari: tutto per indicare ed esprimere concetti che servono ad abbreviare il calcolo e che hanno il loro fondamento in cose reali.

"Non si deve tuttavia credere" cosí dice ancora Leibniz "che con questa spiegazione la dottrina delle grandezze infinite risulti degradata e sia ricondotta a una semplice finzione, poiché esiste sempre — per esprimermi scolasticamente — un infinito sincategorematico (*); cosí per esempio è sempre esatto che 2 è

(*) Cioè la stessa cosa come "infinito potenziale" che risulta da un progredire illimitato.

uguale a $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$ cioè uguale a una serie infinita che comprende tutte le frazioni il cui numeratore è 1 e il denominatore aumenta in progressione geometrica. Malgrado ciò, in questa serie vengono adoperati soltanto numeri finiti e non s'incontra mai una frazione infinitamente piccola, il cui denominatore sia un numero infinito...".

Abbiamo citato così gran parte di questa lettera, perché essa non solo risponde chiaramente al nostro quesito, ma esprime in modo tipico la visione filosofico-matematica di Leibniz. Dopo tali parole si può parlare solo in malafede di ingenuità o di leggerezza.

Naturalmente "documenti" simili potrebbero moltiplicarsi quanto si vuole; prendiamo solo un'altra citazione dallo stesso Leibniz, nella quale viene anche respinto chiaramente il concetto di un infinito attuale, perciò chiuso. Essa venne pubblicata da Gerhardt come appendice all'opera di Leibniz sulla storia e l'origine del calcolo differenziale, e suona così: "L'infinitamente piccolo o l'infinitamente grande si possono sempre riguardare come il 'piccolo a piacere' o il 'grande a piacere', cosicché l'espressione indica sempre solo un insieme determinato o una specie generale, non però un *ultimo* membro di quella specie".

Passiamo ora alla questione dell'integrazione, della quale abbiamo finora appena parlato. Si è accennato che questo secondo aspetto del calcolo infinitesimale non aveva propriamente bisogno di essere scoperto, perché era stato già praticato sotto una certa forma dagli antichi elleni. Tuttavia, bisogna sempre ripeterlo, solo in casi particolari. Non esisteva un metodo generale per sommare insieme parti infinitamente piccole o grandezze piccole a piacere o indivisibili o differenziali, o come si vuol chiamarli, e tanto meno un algoritmo per questo genere di operazione. Tanto più ar-

dente era il desiderio di trovare un algoritmo cosiffatto. Purtroppo — e di ciò dovettero presto persuadersi i primi ricercatori — la sua costruzione urta contro difficoltà quasi insormontabili. L'operazione "litica" o disgiuntiva della sottrazione è univoca, quella della divisione richiede già un certo numero di tentativi, piú ancora ne richiede l'operazione di estrazione di radice, la quale in generale per radici superiori alla cubica si può eseguire solo mediante complicati artifizi d'ogni genere. Nella ricerca del logaritmo di un numero, cioè nella risoluzione della funzione esponenziale a^x, non incontriamo soverchia difficoltà perché i logaritmi li abbiamo a disposizione sotto forma di tabella. Col passo successivo cominciano i guai: l'operazione litica di ordine superiore sarebbe infatti la differenziazione, che di per sé può riuscire assai difficile, quando si tratta di funzioni complicate, pur non offrendo veri e propri ostacoli di principio. Fino a questo punto si va però abbastanza bene, tanto piú che tutte le operazioni "tetiche" (addizione, moltiplicazione, elevazione a potenza, funzione esponenziale) sono "macchine pensanti" di facile manovra. Si rimase perciò tanto maggiormente delusi, quando si scoprí che l'integrazione, la quale è per sua natura una operazione tetica, non si comporta nello stesso modo, anzi, da un punto di vista puramente algoritmico, si presenta come un'operazione litica, e per di piú tutt'altro che chiara. Risolvere o valutare un integrale significa infatti trovare la funzione originaria di cui la funzione sotto il segno d'integrale è la derivata. Detto in parole povere, ciò equivale a chiedere per esempio di che cosa 729 è il quoziente o l'espressione $(x^2 + 3x + 19)$ è il prodotto. Per rispondere a questa domanda si hanno talvolta dei punti di partenza, tal altra no. Spesso occorre far uso di artifizi e di giri viziosi. In nessun caso si può considerare l'integrazione in modo puramente algoritmico, come una

macchina sempre adoperabile. È chiaro che vi sono dei metodi per affrontare il problema. Così per esempio si sa a priori che $\int x^m - dx$, a parte la costante d'integrazione che è in nostra facoltà di aggiungere a qualsiasi integrale, deve avere sempre come funzione primitiva $\frac{1}{m+1} x^{m+1}$. Poiché inoltre $\int (x^n + x^m + x^r + ..)$ dx è uguale a $\int x^n dx + \int x^m dx + \int x^r dx + ...$, è chiaro che un integrale anche complicato può essere valutato facilmente quando si riesca a trasformare in una serie di potenze l'espressione sotto integrale. Con questo metodo si ottiene per lo meno una soluzione approssimata a piacere, anche quando la serie di potenze è infinita, purché si tratti di una serie convergente. I coefficienti della variabile x non entrano in considerazione, dato che, nella loro qualità di costanti, possono sempre venire posti fuori del segno d'integrale. Per esempio sarebbe

$$\int (ax^n + bx^m + cx^r + ...)\, dx = a \int x^n dx + b \int x^m dx + c \int x^r dx + ...$$

Fino dai tempi di Michael Stifel risultò tuttavia che negli sviluppi in serie aveva grande importanza il calcolo combinatorio, poiché per esempio lo sviluppo in serie della potenza di un binomio non è altro che una moltiplicazione ripetuta e i singoli addendi devono essere moltiplicati tra di loro in tutte le possibili combinazioni.

Avuto riguardo a tutto ciò, fu un avvenimento memorabile la scoperta fatta da sir Isaac Newton nel 1776, quando riconobbe che esiste uno sviluppo in serie del binomio per ogni specie di esponente, cioè che ogni espressione della forma $(a + b)^n$ può essere

sviluppata in una serie. Avuto riguardo all'importanza fondamentale di questa scoperta, accenneremo brevemente come si effettua lo sviluppo del binomio nel caso di esponenti frazionari, cioè radici. Supponendo di avere un binomio $(a + b)^{\rho}$ dove ρ è una frazione propria, trasformiamolo nel modo seguente. Ammettiamo che a sia maggiore di b, il che è lecito fare, in quanto, se così non fosse, metteremmo in evidenza b invece di a. Dividiamo dunque per il termine maggiore del binomio, che è nel caso nostro a, e otteniamo $\left[a\left(1 + \frac{b}{a}\right)\right]^{\rho}$ ossia $a^{\rho}\left(1 + \frac{b}{a}\right)^{\rho}$. Questo $\frac{b}{a}$ che ora è anch'esso una frazione propria, essendo $a > b$, chiamiamolo per semplicità x e non ci occupiamo più di a^{ρ}, almeno per il momento. Siamo ora di fronte al problema di sviluppare in serie il binomio $(1 + x)$. Poiché lo stesso Newton lasciò spesso nell'oscurità i suoi metodi di risoluzione e rese noti principalmente i risultati o le formule finali, scriveremo tutto quanto segue sotto forma moderna. Se ora la legge del binomio può essere estesa anche alle potenze negative e frazionarie, dev'essere nel nostro caso $(1 + x)^{\rho}$ uguale a $\sum_{0}^{\infty}\binom{\rho}{k} x^k$, dove abbiamo tralasciato di proposito l'indicazione del limite superiore della sommatoria. Affinché però il nostro punto di partenza risulti più chiaro sostituiamo ρ, che sta a significare una frazione propria, con la frazione $\frac{1}{n}$. Poiché k può arrivare dai 0, 1, 2, 3 fino a un qualsiasi numero naturale ancora indeterminato, abbiamo solo da stabilire come si presentano i coefficienti di queste x^0, x^1, x^2, x^3, ecc. Qui si presenta però la difficoltà di dover costruire coefficienti binomiali della forma $\binom{\frac{1}{n}}{0}$, $\binom{\frac{1}{n}}{1}$, $\binom{\frac{1}{n}}{2}$, $\binom{\frac{1}{n}}{3}$ ecc. i

quali non hanno senso, in quanto la caratteristica fondamentale del calcolo combinatorio è quella di applicarsi soltanto ai numeri interi. $\begin{bmatrix} \rho \\ k \end{bmatrix}$ è il simbolo od operatore combinatorio, dove ρ rappresenta il numero degli elementi da combinare tra di loro e k la classe della combinazione. Così per esempio $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ sarebbe il numero delle combinazioni di cinque elementi presi tre a tre, e darebbe come risultato $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ combinazioni. Siamo qui nuovamente di fronte a un caso di estensione dell'algoritmo a operazioni che di per se stesse non si possono concepire. Questo può effettuarsi sotto forma di artifizi che ci trasportino in modo inecepibile oltre la zona dubbia. Cercheremo dunque insieme a Newton di superare la difficoltà suaccennata.

Procediamo per gradi. Sappiamo che $\begin{bmatrix} \rho \\ 0 \end{bmatrix}$ ha, per convenzione, lo stesso valore di $\begin{bmatrix} \rho \\ \rho \end{bmatrix}$ cioè 1. D'altra parte $\begin{bmatrix} \rho \\ 1 \end{bmatrix}$ è semplicemente ρ. Abbiamo così ottenuto due coefficienti binomiali e, poiché $x^0 = 1$, e $x^1 = x$, possiamo scrivere subito: $(1 + x)^{\frac{1}{n}} = \Sigma \binom{\frac{1}{n}}{k} x^k =$

$= 1 . x^0 + \frac{1}{n} x + \Sigma \binom{\frac{1}{n}}{k} x^k$. Dobbiamo ora trovare in generale come si può rappresentare $\binom{\frac{1}{n}}{k}$. Per questo adoperiamo la formula

$$\binom{\rho}{k} = \frac{\rho\,(\rho - 1)\,(\rho - 2) \ldots (\rho - k + 1)}{k!}, \text{ e cioè}$$

$$\binom{\frac{1}{n}}{k} = \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\left(\frac{1}{n} - 2\right) \ldots \left(\frac{1}{n} - k + 1\right)}{k!}$$

oppure, dopo moltiplicazione di ciascun termine del numeratore per n:

$$\binom{\frac{1}{n}}{k} = \frac{1\,(1 - n)\,(1 - 2n) \ldots [1 - (k - 1)\,n].}{n^k.\,k!}$$

Già da questa formula riconosciamo che dopo aver eseguito il calcolo completo otterremmo una serie infinita, poiché i fattori al numeratore 1, $(1 - n)$, $(1 - 2n)$, $(1 - 3n)$ cresceranno di continuo in valore assoluto e non scompariranno alla fine, come nel caso del binomio con esponente intero, quando $(\rho - k + 1)$ dà zero. Le n sono infatti numeri interi. Vediamo piú chiaramente questo sviluppo, trasformando nuovamente e rendendo positivi i termini del numeratore, col mettere in evidenza $(-1)^{k-1}$ il che non significa altro se non moltiplicare per -1 ciascun fattore del numeratore. Otteniamo:

$$\binom{\frac{1}{n}}{k} = \frac{(n - 1)\,(2n - 1) \ldots [(k - 1)\,n - 1]}{n^k.\,k!}\,(-1)^{k-1},$$

dove $[(k - 1)\,n - 1]$ non può mai diventare zero, ma diventa viceversa sempre piú grande, poiché k è il numero d'ordine dell'ultimo termine trattato della serie, cioè il numero naturale che dà il numero dei termini sviluppati. Si può trasformare ancora nel modo seguente:

$$\binom{\frac{1}{n}}{k} = \frac{n-1}{1n} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{3n-1}{3n} \cdots \frac{(k-1)\,n-1}{(k-1)\,n} \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{n.\,k}.$$

Si ottiene, come formula finale per la serie binomia nel caso di esponenti frazionari, dove x è minore dell'unità (*) l'espressione

$$(1+x)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}x +$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{2}^{\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(k-1)n}\right)\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right]x^k.$$

Questa formula appare terribilmente complicata, ma per l'uso pratico richiede soltanto molta attenzione. Cosí per esempio sarebbe

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(1+x)} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \ldots$$

e

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(1+x)} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \ldots$$

Come si vede, le serie sono alternanti, cioè, a partire dal secondo termine, alternano il segno piú al meno.

Leibniz estese ulteriormente il teorema del binomio con l'aiuto del calcolo combinatorio, e arrivò al teorema del polinomio che permette l'elevazione a potenza di espressioni con piú di due termini. Ma su questo non possiamo soffermarci; abbiamo voluto solo far vedere in qual modo tutti i rami della matematica si svilupparono per opera degli eroi del secolo decimosettimo fino a formare un mondo a sé. La geometria analitica promosse l'unione della geometria e dell'algebra; di qui nacque il problema della tangente e il calcolo differenziale e integrale col concetto di funzione e tutti gli altri problemi che sono in relazione con l'analisi infinitesimale, come la determinazione di massimi, minimi, aree, volumi, lunghezze di curve e curve con particolari proprietà di massimo e minimo.

(*) Altrimenti la serie non tende verso zero.

Per vie traverse l'integrale venne posto in relazione col calcolo combinatorio mediante lo sviluppo in serie, specialmente del binomio, relazione che doveva diventare sempre piú stretta e doveva subito estendersi anche alle derivate di ordine superiore. Nello stesso periodo il genio di Leibniz, con un accenno occasionale in una lettera a L'Hospital, poneva le basi di una nuova scoperta di enorme importanza, i determinanti, i quali piú tardi — come categoria mentale puramente combinatoria — dovevano svilupparsi in uno dei piú potenti strumenti della matematica. Notiamo qui di passaggio che Leibniz ne fu il primo inventore, riservandoci di farne un esame piú accurato in altra occasione. Ma non basta. I logaritmi, appena inventati, penetrarono nell'analisi infinitesimale nel luogo piú inaspettato, e diventarono, come già fu detto, l'asse della matematica superiore. Infatti, con la semplice formula d'integrazione $\int x^m\,dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1}$ si urtò ben presto in una inspiegabile lacuna. Mentre l'algoritmo forniva per ogni n positiva, negativa o frazionaria un valore esatto e perfino per n irrazionale un valore approssimato, essendo per esempio $\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4$, $\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $\int x^{-4} = -\frac{1}{3}x^{-3} = -\frac{1}{3x^3}$, ecc., si otteneva per $\int x^{-1}\,dx$ o, il che è lo stesso, per $\int \frac{1}{x}dx$ il valore assurdo $\int \frac{1}{x}dx = \int x^{-1}dx = \frac{1}{-1+1}\cdot x^{-1+1} = \frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0}\cdot 1$, cioè l'infinito. Questo non poteva essere, e qui cadeva improvvisamente l'algoritmo. Di ciò si era tanto piú sicuri in quanto si poteva vedere la

superficie integrale della funzione $\frac{1}{x}$ quando si andava a disegnarla. Questa superficie era la superficie di una iperbole, e presto si riconobbe che non solo era un'iperbole, ma che la funzione primitiva di questa funzione rappresentava il logaritmo naturale, di guisa che si poteva porre $\int x^{-1}\,dx = \log_e x$. La derivata di $\log_e x$ si rivelava quindi sotto la forma x^{-1} oppure $\frac{1}{x}$: altra importantissima scoperta e una nuova relazione tra continenti lontanissimi del mondo matematico.

Questi pochi esempi servono solo a dare un'idea del movimento di cui fu centro Leibniz e che in pochi decenni trasformò il mondo faustiano occidentale. Noi riusciamo difficilmente a concepire l'ebbrezza spirituale di quell'epoca. Nella società galante del tardo barocco e del rococò la matematica era all'ordine del giorno, e il nobile conte de L'Hospital non era il solo a occuparsi di analisi infinitesimali. L'Hospital ne diventò forse il piú importante volgarizzatore, poiché il suo lucido e vasto trattato costituí per quasi un secolo la base per lo studio di questo genere di calcolo. Si parlava ovunque della risoluzione del problema della catenaria, opera di Leibniz, che dà la formula di una catena sospesa liberamente, ossia della curva generata da una catena cosiffatta. Oppure della brachistocroma, del problema fiorentino già citato, della "trattrice", curva generata ponendo un orologio con catena su un tavolino e facendo scorrere l'estremità della catena tesa lungo una retta. Il centro dell'orologio si avvicinerà sempre piú a questa retta, senza mai raggiungerla. Questa "trattrice", analizzata anch'essa da Leibniz, la ritroveremo piú tardi nelle geometrie non euclidee tipo Gauss-Bolyai-Lobacevskij.

Noi possiamo appena accennare a tutto questo,

possiamo dire ancora brevemente che Leibniz eseguí indagini sulla "geometria di posizione", distinguendola con parole chiare e nette dalla geometria metrica, e fece opera esemplare in tutto ciò che riguarda la notazione. Cosí comprese per primo la natura degli indici, dei quali ripeté sempre che non erano da considerare come numeri, pensiero fondamentale per il calcolo combinatorio e quindi per i determinanti, come mostreremo piú avanti.

In generale l'ombra di Leibniz dominerà il progresso realizzato nei secoli successivi, e ancor oggi non sappiamo esattamente se nell'eredità da lui lasciata — purtroppo in gran parte inedita — non vi siano nascoste delle cose capaci di servire di guida in un remoto futuro. Oggi infatti ci troviamo in mezzo a un caos tumultuante di scoperte matematiche sviluppate solo a metà; ma anche di questo parleremo piú tardi.

Ora, per finire il capitolo, un breve sguardo all'infausta contesa sulla priorità tra Newton e Leibniz, che fu solo di danno alla scienza, mentre costò a Leibniz inutili fatiche, e spinse Newton a condannare in blocco, in un accesso d'ira, tutta l'analisi infinitesimale.

È innegabile, da quanto sappiamo oggi, che Newton e Leibniz, indipendentemente l'uno dall'altro, scoprirono lo stesso strumento matematico e lo usarono correttamente. Newton lo considerò esclusivamente dal punto di vista foronomico e dinamico e impiegò nella fisica il calcolo da lui inventato. Usò le espressioni "flussioni" e "fluenti", e scrisse la flussione con $\dot{x}$ e la fluente con $'x$. È poi accertato che Newton, cronologicamente parlando, venne a conoscenza del calcolo infinitesimale prima di Leibniz, e cioè probabilmente già nel 1665. Leibniz d'altra parte pervenne al suo calcolo per altre vie, attraverso considerazioni logiche e di calcolo combinatorio e dallo studio delle differenze finite. Egli inoltre non ricercò solo il possesso personale di questo strumento matematico, ma

procurò di farne un chiaro algoritmo, un metodo di calcolo vero e proprio. La sua scoperta risale nelle linee essenziali al 28 ottobre 1675 e venne pubblicata nel 1684, epoca in cui i risultati ottenuti da Newton non erano ancora conosciuti.

Non vogliamo dire altro su questa contesa, poiché già il fatto che oggi tutto il mondo, compresi gli anglosassoni, adopera senza eccezioni la notazione di Leibniz, ha deciso obiettivamente la questione. La scoperta non riguardava l'oggetto in sé; questo era in gran parte conosciuto quando i due rivali entrarono in campo. Si trattava in sostanza, e quasi esclusivamente, di ricavare dal problema e dalle sue soluzioni parziali un algoritmo accessibile e chiaro anche per uomini di media levatura, un algoritmo che contenesse inoltre la possibilità di un ulteriore sviluppo. Questa grande impresa è stata condotta a termine da Leibniz, mentre Newton d'altra parte, oltre ai suoi eterni meriti come fisico, occupa come matematico una posizione eminentissima nella trattazione delle serie, nel calcolo delle probabilità e in altri campi.

Riusciamo a mala pena ad afferrare la personalità di Leibniz in tutta la sua grandezza. Fu illustre come giurista, teologo, storico, inventore, fisico, naturalista, geologo, chimico, politico, filologo e, "oltre tutto il resto", come matematico. Non parliamo affatto di Leibniz come filosofo e poeta, essendo fin troppo noto che egli era "anzitutto" filosofo. Che cos'era egli dunque, principalmente? Nella storia di quasi tutte le discipline si sostiene che l'opera di Leibniz ebbe la massima importanza in quel particolare campo, importanza che ha potuto essere riconosciuta solo poco alla volta.

Non sta a noi decidere. Possiamo solo dire che da questa valutazione emerge il convincimento che nella sua persona lo spirito faustiano si rivelò sotto forma di genio universale nel senso piú rigoroso della parola.

Solo da questo sapere complesso poteva nascere la matematica come universo, non essendo la sua visione offuscata dalle lenti di alcuna specializzazione. Sotto la brillante esteriorità del genio troviamo un grande spirito patriottico, un'incrollabile fede in Dio e un ottimismo, sorto dalla profonda desolazione della guerra dei trent'anni, in virtú del quale egli poté diventare amico e consigliere del principe Eugenio, di Pietro il Grande, di Luigi XIV, del re e della regina di Prussia, degl'imperatori Leopoldo I e Carlo VI, e, non ultimi, dei duchi di Brunswick.

Dopo Leibniz, che acclimatò la matematica in terra tedesca, gli studi matematici in Germania produssero ancora figure come Eulero, Riemann, Weierstrass, Grassman, e sopra tutti il *princeps mathematicorum*, Carlo Federico Gauss, paragonabile solo ad Archimede nella sua universale grandezza.

XIII

PONCELET

La matematica come specchio magico

A chiunque abbia studiato un po' a fondo Leibniz e Newton, apparirà chiaro che l'aspettativa piú intensa riguardo alla produzione di queste due grandi menti è superata dalla realtà storica; perciò tutto quello che abbiamo voluto e potuto dire nel quadro del nostro lavoro non è stato in realtà che un debole accenno.

Ma dopo Leibniz incontriamo uno stato di cose ancor piú difficoltoso, al quale dobbiamo dedicare alcune parole. Noi moderni ci troviamo cioè a poco piú di due secoli di distanza dagli avvenimenti che abbiamo or ora descritti. Anche se affermiamo che la matematica è passata dopo Descartes dallo stadio dell'artigianato allo stadio della grande industria, anche se in avvenire tutti gl'ingegni del mondo agissero come un ingranaggio moltiplicatore che esaltasse e potenziasse gl'impulsi determinanti di questa industrializzazione scientifica, pure noi tutti non siamo diventati per questo dei superuomini che se ne stiano isolati e solitari nella storia dello spirito. E non sappiamo se un bel giorno una gran parte del patrimonio matematico prodotto industrialmente non verrà scartato come un oggetto di moda di un'epoca superata. In breve, non abbiamo ancora avuto in questi due secoli una sufficiente prospettiva storica né tanto meno possediamo una facoltà profetica di estrapolazione per il futuro.

Poiché oggi però — cosí almeno la pensano i matematici piú maturi e immaginosi del presente — ci

troviamo in una fase non ancora chiusa dello sviluppo matematico, qualsiasi rappresentazione delle scoperte fondamentali successive a Leibniz sarebbe un quadro approssimato puramente arbitrario, tanto piú in quanto non è affatto stabilito se l'eredità di Leibniz sia già stata valutata fino alle ultime conseguenze. In molti particolari questa eredità classica è diventata per certo patrimonio comune; ma come un tutto unico, come disegno generale e come universo matematico non è stata sviluppata fino alla massima possibile estensione.

Al nostro compito si oppone però anche una seconda difficoltà assai piú grave. Abbiamo condotto il nostro lettore passo passo fino al centro del calcolo infinitesimale e abbiamo esposto come si sono sviluppate le operazioni fondamentali, dall'addizione alla moltiplicazione, da questa all'elevazione a potenza e alla funzione esponenziale, e infine all'integrazione. Anche le operazioni litiche corrispondenti, la sottrazione, la divisione, l'estrazione di radice, la determinazione del logaritmo e la differenziazione non ci sono rimaste estranee. Né abbiamo tralasciato di accennare all'ampliamento del regno dei numeri, cominciando dai numeri naturali su su fino ai numeri frazionari, irrazionali, negativi e infine immaginari. I problemi dell'infinito ci sono diventati piú o meno familiari, i paradossi ci sono apparsi come il naturale accompagnamento del calcolo infinitesimale. A questo punto comprendiamo l'essenza dell'algoritmo, del sistema. Non ci meravigliamo piú quando nelle serie vediamo emergere un nuovo concetto di numero, e cosí pure nelle funzioni, pur sapendo che le serie servivano in origine per la ricerca di soluzioni approssimate e che le funzioni rappresentano certe leggi espresse per via di formule. L'evoluzione ulteriore e la trattazione piú raffinata dell'algoritmo ebbero però ben presto ragione di questi concetti in origine straordinariamente chiari e di comprensione relativamente facile. Infatti

all'improvviso per necessità di calcolo si capovolse tutto, e dagli elementi dati si risalì alla loro possibile generazione interpretando le grandezze date secondo procedimenti ai quali esse sono completamente estranee. Così, per esempio, invece di ottenere il valore di una radice come risultato dello sviluppo in serie del binomio, si considera d'un tratto un qualsiasi numero irrazionale come una serie e lo si usa nei calcoli ulteriori alla stregua di una serie. Oppure si prende una successione empirica di numeri, di risultati di misure, s'impone che questi numeri rappresentino delle ordinate, siano cioè valori di una certa funzione, e si procura di collegarli con una legge comune. Con ciò il concetto di funzione risulta enormemente allargato, poiché adesso ogni numero concreto, generico oppure ottenuto dal complesso delle piú svariate operazioni, può essere una funzione, ed è lecito chiamare funzione ogni elemento matematico dato di qualche specie.

Questo progresso e questa crescente complicazione hanno l'effetto di confondere e di spaventare la persona di cultura media che vuole avvicinarsi alla matematica, e oggi meno che mai esiste una "via regale", nel senso datole dal re Tolomeo, per facilitare l'accesso al pericoloso labirinto della matematica moderna.

Tali avvertenze dovevano esser fatte a questo punto per non esporre a delusioni il lettore dei nostri ultimi capitoli. Ci daremo ogni pena per afferrare almeno un lembo del segreto, ma, data la natura delle questioni in giuoco, possiamo entrare nelle singolarità della matematica moderna solo molto in generale, riattaccandoci a quanto è già noto e sostituendo pedagogicamente cose piú semplici a quelle piú complicate. Questa riserva vale in misura minima per la geometria, e in misura maggiore per la "matematica superiore" nel senso corrente, o per l'analisi infinitesimale.

Apparve dunque in tutti i campi d'applicazione

che la completa padronanza del calcolo differenziale e integrale aveva messo in mano all'uomo un'arma di cui nessun'epoca anteriore possedeva l'eguale. Il regno continuo della realtà, il *continuum* dell'essere, il divenire che si presenta sotto forma di funzione, in breve tutte le *figurae* e le *formae* potevano venire attaccate con quest'arma. Tutto il secolo decimottavo era preso da questa ebbrezza razionalistica, che sembrava dovesse sollevare definitivamente l'uomo fino alla signoria completa sulla natura. E la Dea Ragione sorrideva seduttrice, incitando a sempre nuovi progressi.

Ininterrottamente, di scoperta in scoperta, con una vicenda non riferibile in particolare, lavorarono genî di prim'ordine come i Bernoulli, i quali finirono per costituire tutta una dinastia di matematici, come Eulero, Lagrange, Legendre, D'Alembert, tanto per citare solo qualcuno dei nomi piú importanti. E alla fine del secolo decimottavo si formò una scuola intorno al geniale combinatorista Hindenburg, il quale, partendo dal teorema del polinomio, voleva costruire tutta la matematica su basi puramente combinatorie. In breve, il predominio dell'algebra e dell'algoritmo, iniziatosi con Descartes e affermatosi solidamente con Leibniz, sembrava dover diventare la premessa di ogni progresso futuro, progresso di cui non si vedeva la fine. Diciamo qui ancora, sempre a titolo di citazione, che Gabriel Cramer fondò per la seconda volta nel 1750, indipendentemente da Leibniz, la teoria dei determinanti, circostanza che, come vedremo piú tardi, rappresenta un punto culminante del processo di conquista compiuto dall'algebra e dall'algoritmo.

Cosí il grande Laplace poteva scrivere nel 1799 a proposito della matematica, nella sua celebre *Exposition du système du monde*: "L'analisi algebrica ci fa presto dimenticare l'oggetto principale delle nostre indagini, per fissare la nostra attenzione su combinazioni astratte,

e solo alla fine ci riconduce a tale oggetto. Ma quando ci si abbandona al metodo dell'analisi, si arriva, grazie alla generalità del metodo e grazie al vantaggio inapprezzabile di trasformare le deduzioni logiche in operazioni meccaniche, a risultati che sono spesso inaccessibili alla sintesi geometrica. La fecondità dell'analisi algebrica è cosí grande, che basta tradurre nel suo linguaggio universale i fatti speciali per vedere crescere dalla sua semplice forma di espressione una quantità di fatti nuovi e inaspettati. Nessun altro linguaggio è capace di un'eleganza com'è quella che si presenta quando viene sviluppata una lunga serie di espressioni, concatenate l'una all'altra e scaturenti da un'unica idea fondamentale. I matematici di questo secolo sono convinti della sua superiorità, e perciò si adoperano ad estendere il predominio dei metodi analitici e a rompere le barriere che lo limitano".

Fin qui Laplace, citato da Boutroux. Vediamo che egli vive ancora nell'ebbrezza algoritmico-razionalistica del secolo decimottavo, e vuole eliminare le ultime barriere che ostacolano la completa razionalizzazione, cioè l' "algebrizzazione" della matematica. Naturalmente per Laplace sotto il nome di "analisi" o "metodo analitico" s'intende qui solo l'algebra, e nient'altro che l'algebra.

Sia detto perciò ancora una volta che il secolo decimottavo considerava al primo piano del proprio interesse quasi esclusivamente l'analisi infinitesimale algebrizzata e "algoritmizzata", e si rallegrava del crescente successo nelle piú difficili integrazioni, come pure della costruzione del calcolo infinitesimale delle variazioni. Pur tuttavia lo stesso creatore di tutto questo movimento, Leibniz in persona, aveva osservato nella sua *Ars inveniendi*: "Spesso i geometri possono dimostrare in poche parole quello che col calcolo sarebbe assai lungo da provare... la via algebrica conduce costantemente alla mèta, ma non è sempre la mi-

gliore". E noi abbiamo già accennato che lo stesso Leibniz con la sua idea di una "geometria di posizione" assegnò alla geometria un campo indipendente e ricco di futuri sviluppi, non accessibile direttamente all'algebra.

Che l'elaboratore dell'eredità di Pascal si sia occupato di questi argomenti, non è cosa da meravigliare. Anche uno spirito piú limitato di Leibniz avrebbe dovuto stupirsi di alcuni spunti di Pascal che accennavano verso una direzione non ancora percorsa. Tuttavia il chiasso attorno al calcolo infinitesimale e alla geometria analitica collegata con esso fu sí grande, che tutti questi suggerimenti e accenni si persero inascoltati fino alla fine del secolo decimottavo.

È assai interessante dal punto di vista della psicologia dei popoli che il nuovo periodo storico della geometria, nel quale stiamo per entrare, abbia preso forma definitiva esclusivamente nella mente di francesi. Per dimostrarlo in particolare, saliamo ancora sul nostro tappeto magico, che ci deve portare questa volta a Lione, in un tempo precedente a Leibniz. Là viveva nella prima metà del secolo decimosettimo un giovane architetto di nome Desargues, il quale, come piú d'un matematico insigne, si distingueva per le sue stranezze e la sua originalità. Compilò un'opera assai profonda dal titolo *Brouillon-projet d'une atteinte aux évènements de rencontre d'un cône avec un plan* (1639); essendo però, come abbiamo già detto, un originale, trovò opportuno far stampare quest'opera in lettere microscopiche su fogli volanti. Ma non basta: nascose le sue scoperte sotto una lingua ampollosa, indicando i concetti geometrici con nomi botanici e parlando continuamente di fiori, tronchi, rami e simili.

Fece pervenire questi fogli ai suoi amici e li distribuí anche tra i dotti matematici del suo tempo; i quali, non c'è da stupirsi, non sapevano che fare d'un argo-

mento in sé nuovo e per di piú presentato sotto una forma cosí difficile. Come in tutte le scienze, anche nella matematica si trovano fin dai tempi piú remoti postulanti e ciarlatani d'ogni genere, ed è spesso difficile distinguere una novità da una stramberia o da un'impostura. Desargues in ogni caso si era comportato in modo da essere ritenuto un cavaliere d'industria, e solo pochissime menti particolarmente illuminate, come Fermat, Descartes e Pascal, riuscirono a orientarsi nel "puzzle" matematico-botanico del lionese fino a giungere alla sua comprensione. Mentre però i primi due erano cosí presi dai problemi delle coordinate da non fare alcun passo innanzi rispetto ai risultati raggiunti da Desargues, il geniale Blaise Pascal, appena sedicenne, concepí il piano di utilizzare le conoscenze di Desargues come base per una propria costruzione ulteriore.

Prima di entrare in questo argomento, occorre perlomeno accennare ai principali risultati di Desargues. È facilmente comprensibile che la sua attività di architetto lo portasse a contatto con problemi di prospettiva. Questa scienza, già studiata da altri prima di lui con scopi pratici, assunse nella sua mente un carattere matematico, e diventò cosí una vera scienza. Egli si pose due domande che piú tardi, nel secolo decimottavo, assunsero importanza fondamentale. Ricercò cioè le proprietà delle singole sezioni coniche, non piú nel senso di Apollonio, ma lasciò che il piano secante assumesse diversi angoli d'inclinazione rispetto all'asse del cono, dalla perpendicolarità al parallelismo e alla coincidenza in successione continua, e giunse cosí alla convinzione che tutta una serie di proprietà rimaneva inalterata malgrado le diverse inclinazioni del piano secante, era cioè valida per tutte le sezioni coniche. La seconda questione di cui si occupò Desargues fu la diversità tra parallele e rette intersecantisi, che fino allora ci si era sempre sentiti in obbligo di am-

mettere. Egli trovò presto che le proprietà comuni dell'una e dell'altra specie di rette sono più numerose delle diversità, anzi in prospettiva si era spesso costretti a identificarle, cosa evidente a chiunque rifletta che prospettivamente le parallele si mutano tosto in rette che si tagliano, quando sono viste da determinati punti. Da questo risulta una specie di identità tra cono e cilindro, e nasce un concetto paradossale, che doveva diventare di una fecondità incommensurabile per la geometria: il concetto di "punto all'infinito" e di "figura all'infinito". Le rette parallele si tagliano proprio nel punto all'infinito e diventano così rette intersecantisi. Il cilindro diventa un fascio di raggi, il cui punto d'unione è a distanza infinita. Nelle parallele non vi sono però due punti all'infinito secondo che il prolungamento venga fatto verso destra o verso sinistra; al contrario — assunzione estremamente ardita — per ogni fascio di parallele (nel piano o nello spazio) vi può essere un solo punto d'incontro all'infinito. Nello stesso modo i raggi del sole ci appaiono paralleli, ma non potremo mai affermare che essi provengano da due soli diversi.

Appena i tempi furono maturi, apparve manifesto che con questa nozione fondamentale della permanenza delle proprietà delle figure malgrado le trasformazioni prospettiche e col concetto delle figure all'infinito era stata creata una geometria del tutto nuova. Sul momento Desargues fu abbondantemente deriso e anche la sua celebre proposizione, che i lati prolungati di due triangoli qualsiasi messi in prospettiva si devono tagliare due a due su una stessa retta, non trovò eco. Solo Pascal studiò ulteriormente le sezioni coniche nel senso di Desargues, e dette presto alla luce un nuovo teorema fondamentale, talmente confinante con la magía che lo stesso Pascal lo designò col nome di "miracoloso". E giustamente, poiché questo teorema di Pascal, al pari di quello di Desargues, fu ri-

conosciuto alla fine del secolo decimonono come l'unico ponte tra la riva dell'algebra e quella della geometria su cui sia possibile passare senza urtare la logica. Ma di tutto questo parleremo piú tardi. Notiamo qui solo un avvenimento abbastanza singolare. Il capolavoro di Desargues da noi citato, scomparso per quasi due secoli, fu scovato in una cassa di libri presso un rigattiere sulla riva della Senna e acquistato nientemeno che dal grande geometra e storico della matematica Michel Chasles. Questo nel 1845, quando già la "nuova geometria" o "geometria proiettiva" era stata fondata da Poncelet e da von Staudt.

Abbiamo veduto che il grande Laplace nell'ultimo anno del secolo decimottavo aveva trovato parole calde ed entusiastiche per l'onnipotenza dell'algoritmo algebrico. Cosí entusiastiche da far credere che per il futuro non vi fosse che quest'unica via dell'algebra algoritmica e dell'analisi infinitesimale per assalire il cielo matematico con l'arma delle coordinate e delle funzioni. Nello stesso tempo si verificarono però due avvenimenti, dei quali uno verrà citato subito, mentre l'altro dovrà essere considerato nel capitolo successivo al prossimo, perché riguarda la prima apparizione del giovane Gauss. Dunque, nell'anno 1798 Gaspard de Monge, geniale geometra e ufficiale del genio nell'esercito francese, pubblicò il frutto dei suoi studi decennali. Non era se non il primo esauriente trattato sulla cosiddetta "geometria descrittiva", che appartiene in generale alle applicazioni della matematica, ma ha nello stesso tempo tanti rapporti con la matematica pura, da non poter passare sotto silenzio la sua prima enunciazione completa, anche se Poncelet non fosse stato allievo e ammiratore di Monge. Incidentalmente dobbiamo dire che in questa grande epoca della matematica francese il destino coinvolse quasi tutti i suoi cultori in avvenimenti romanzeschi. Lo stesso Monge, fondatore delle celebri *École Normale*

ed *École Polytechnique*, nella sua qualità di ministro della Marina della Rivoluzione ebbe il dubbio onore di lasciar eseguire la sentenza di morte di Luigi XVI. Sotto Napoleone raggiunse una posizione elevata, cadde però con lui, e trascorse nell'ombra il resto della vita.

Il suo allievo Jean-Victor Poncelet, anch'egli ufficiale del genio dell'esercito francese, andò in Russia nel 1812 con la Grande Armata e con altri compagni di sventura fu fatto prigioniero presso Krasnoje. In quel terribile inverno, cosí freddo che il mercurio gelava nei termometri, fu costretto a marciare a piedi fino a Saratov sul Volga, dove arrivò ammalato ed esaurito. Tanto piú ammirevole è la grandezza d'animo di questo uomo, che arrivò al punto di procurarsi della carta grossolana e delle penne coi pochi copechi che riceveva per il suo mantenimento, e di fabbricarsi da sé l'inchiostro col nerofumo della lucerna, poiché infine doveva pur avanzargli un po' di denaro per il cibo. Con questo lussuoso materiale cominciò nella primavera la sua opera capitale, opera che si riallaccia a Desargues e a Pascal, benché Poncelet non conoscesse da vicino i lavori del primo. Egli lamenta infatti nella sua prefazione la perdita dell'opera principale di Desargues, quella di cui abbiamo già detto che fu ritrovata da Chasles nel 1845.

Poncelet ritornò a Metz, sua città natale, nel 1814, e nel 1822 completò il suo capolavoro, *Traité des propriétés projectives des figures*, impresa d'importanza fondamentale nella storia della matematica, che però non incontrò in Francia un'adeguata comprensione. L'Accademia gli negò perfino la pubblicazione delle sue scoperte, cosicché queste dovettero apparire in Germania, nella rivista di Crelle. Questa circostanza fu del resto un bene per la matematica, perché in Germania si costituí tosto una falange di menti affini, tra cui in prima linea Steiner e von Staudt, le quali portaro-

no la geometria proiettiva alla sua attuale perfezione.

Non vogliamo precedere gli eventi; ascoltiamo piuttosto dallo stesso Poncelet come concepiva il suo problema. "Consideriamo" dice Poncelet "una qualunque figura in una posizione generale, in certo qual modo indeterminata, che la figura può assumere senza pregiudicare le leggi, le condizioni, i legami esistenti tra le diverse parti del sistema (dato mediante la figura in conformità alla sua definizione); supponiamo di aver trovato con questi dati una o piú relazioni o proprietà della figura, non importa se metriche o proiettive. Se ora mantenendo gli stessi dati si altera la figura primitiva poco quanto si vuole o se per certe parti di questa figura si ammette un movimento continuo sí, ma altrimenti arbitrario, non è forse chiaro che le stesse proprietà e le stesse relazioni, valide per il primo sistema, rimangono utilizzabili anche per i diversi nuovi sistemi derivati in questa guisa da quello dato?"

Con queste parole viene promossa chiaramente una "geometria di posizione", come già Leibniz l'aveva intravista. La misura e la figura scompaiono dalla geometria e rimangono vaghe "relazioni" e "proprietà", le quali singolarmente o in gruppi sono insensibili ad ogni deformazione o alterazione del sistema. Teoremi di questo genere erano stati già trovati, come abbiamo accennato, da Desargues e da Pascal, e anche Leibniz ed Eulero vi avevano dato il loro contributo, come per esempio il famoso teorema del poliedro di Eulero, che può venire espresso semplicemente cosí: "il numero degli angoli piú il numero delle facce è uguale al numero degli spigoli piú due", ed è valido per tutti i poliedri, ad eccezione di alcuni casi speciali che raramente s'incontrano nella geometria consueta. Anche il francese Carnot aveva già contrapposto alle figure geometriche fino allora conosciute un sistema di figure "complete", e concepiva queste in senso combinatorio. Quattro punti costituiscono, per esempio, un quadrila-

tero completo, quando sono tracciate tutte le rette che possono passare per essi. Questo quadrilatero completo ha 4 vertici e $\binom{4}{2}$ lati, cioè 6 lati. Viceversa quattro rette possono tagliarsi in $\binom{4}{2}$ punti, cioè in 6 punti, ecc.

Questo sistema di costruire tutte le figure dagli elementi punto, retta, piano, ecc., è un sistema essenzialmente sintetico, perciò anche la geometria proiettiva viene distinta spesso col nome di geometria sintetica. Si volle, e questo è il significato profondo della sua creazione, offrire all'onnipotente geometria analitica e all'algebrizzazione e algoritmizzazione di tutta la matematica la dimostrazione che anche la geometria poteva incorporare i vantaggi dell'algoritmo. Si volle far riacquistare alla geometria con un ardito attacco la sua antica posizione privilegiata, ma in realtà si penetrò in un nuovo mondo di meraviglie e di scoperte, finché — ironia della sorte — la "nuova geometria" cominciò a lasciar cadere la sua veste geometrica, tanto che oggi ha quasi esclusivamente i tratti di un'algebra raffinata. Frattanto si sono avverati molti sogni, tra cui il piú bello è rappresentato dal "principio di dualità", scoperto da Poncelet e pubblicato nel 1822. Pochi anni dopo esso fu trovato e pubblicato anche da Gergonne, indipendentemente da Poncelet.

Questo principio magico, del quale daremo una sorprendente dimostrazione, permette di trovare nuove proposizioni geometriche mediante un semplice scambio di termini o di concetti. Basta infatti scambiare tra loro le parole "tagliare" e "collegare", "punto" e "retta", per arrivare a nuove scoperte. Sapendo che in un piano due "rette" si "tagliano" in un "punto", si sa subito, traducendo nel linguaggio della dualità, che in un piano due "punti" sono "collegati" da una

"retta". Nel caso di questi semplici enunciati geometrici il funzionamento del principio di dualità appare ovvio e per nulla sconcertante. Quanto sia ingannevole però quest'apparenza può essere illustrato dal fatto che Pascal scoprí nel 1640 il suo celebre teorema dell'esagono, al quale Brianchon trovò il teorema correlativo solo

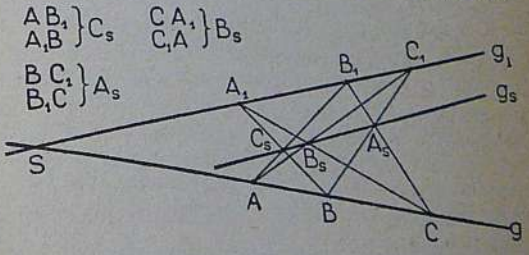


FIG. 9

nel 1806, cioè ben 166 anni dopo. Se Pascal avesse conosciuto il principio di dualità, quei 166 anni si sarebbero ridotti a due minuti.

Diamo qui appresso un caso particolare del "teorema di Pascal" che noi utilizzeremo per il nostro scopo:

Supponiamo di avere due rette intersecantisi, tra cui, secondo le nostre convenzioni sui punti all'infinito, sono da annoverare anche le parallele. Queste rette siano g e g_1 (fig. 9). Sulla g_1 si trovino tre punti a piacere A_1, B_1 e C_1, e anche sulla g tre punti arbitrari A, B e C. Colleghiamo ora A con B_1 e A_1 con B, e prolunghiamo queste due linee d'unione fino ad incontrarsi.

Chiamiamo il punto d'intersezione C_s. Colleghiamo poi B con C_1, e B_1 con C, ottenendo il punto d'intersezione A_s. Quando infine avremo unito C con A_1 e C_1 con A, ottenendo il punto d'intersezione B_s, osserveremo con sorpresa che i tre punti d'intersezione ot-

tenuti A_1, B_1, C_1 si trovano su una stessa retta g_1. Aggiungiamo qui che nell'esecuzione pratica di questi problemi occorre un certo metodo e un opportuno colpo d'occhio perché il disegno riesca bene. Certo, il teorema dev'essere valido in qualsiasi caso, ma in pratica può capitare che scegliendo i punti poco opportunamente le intersezioni cadano fuori del foglio. Questo inconveniente è stato preso talvolta come arma contro la geometria proiettiva, e si è detto che questa geometria parte tranquillamente dal presupposto che si possa eseguire in realtà qualsiasi "intersezione", intendendosi ciò come possibilità grafica. Quando però io devo tracciare linee che mi dànno il punto d'intersezione per esempio a distanza di 150 metri, non posso certo utilizzare convenientemente queste costruzioni per gli scopi pratici.

Questa critica non del tutto ingiustificata non deve però impressionarci né diminuire la nostra meraviglia quando vedremo che il principio di dualità ci farà superare di colpo in pochi minuti l'intervallo di 166 anni. Dobbiamo solo scambiare tra loro le parole "collegare" e "tagliare" e le parole "punto" e "retta", per enunciare subito il teorema correlativo di Brianchon. Lasciamo stare la teoria, facciamo subito la prova pratica. La nostra nuova proposizione dovrà suonare così. Abbiamo due punti P_1 e P (nel caso del teorema di Pascal avevamo due rette g_1 e g). Nel teorema di Pascal le rette "collegavano" i tre punti A, B e C e rispettivamente A_1, B_1, C_1. Dobbiamo ora tradurre le parole di Pascal nel linguaggio di Brianchon, perciò nei nostri due punti, P_1 e P si "tagliano" tre "rette", a_1, b_1 e c_1, e rispettivamente a, b, c. Andiamo avanti. Nel teorema di Pascal abbiamo "collegato" i tre "punti"; ora dovremo far "tagliare" le tre rette a due a due, con lo stesso sistema usato da Pascal, cioè a con b_1, a_1 con b, b con c_1, b_1 con c e infine c con a_1, e c_1 con a. Con questo abbiamo eseguito solo la costruzione correlativa

alle linee d'unione di Pascal. Che altro abbiamo fatto dopo? Abbiamo fatto "tagliare" le "rette di collegamento". Che cosa dobbiamo fare nel caso del teorema di Brianchon? "Collegare" i "punti d'intersezione". Il collegamento dei punti d'intersezione della retta a con b_1 e della retta a_1 con b dà la retta c_s. I punti d'intersezione della retta b con c_1 e della b_1 con c dànno la retta a_s, e i punti d'intersezione della retta c con a_1 e della c_1 con a dànno la retta b_s. Abbiamo perciò ottenuto,

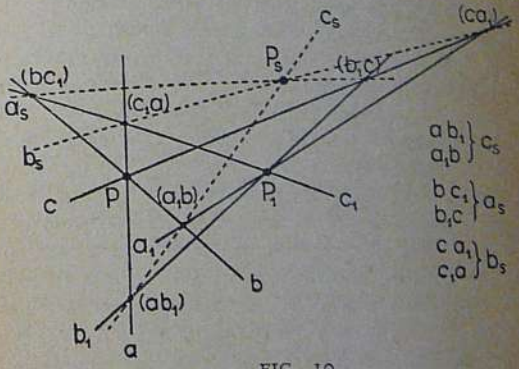


FIG. 10

applicando rigorosamente il principio di dualità ed eseguendo per così dire un giuoco mentale, al posto dei tre "punti d'intersezione" A_s, B_s e C_s le tre "rette di collegamento" a_s, b_s e c_s. Possiamo ora dedurre l'ultima conseguenza: se cioè con Pascal i tre punti d'intersezione devono trovarsi su una stessa retta, con Brianchon le tre rette di collegamento devono passare per uno ed un solo punto d'intersezione P_s. Ed effettivamente disegnando la figura ci convinciamo con meraviglia dell'infallibile sicurezza della macchina pensante or ora acquisita (fig. 10).

Questo principio di dualità è però ancora più me-

raviglioso di quanto abbiamo potuto mostrare nel caso presente. Infatti non soltanto il "punto" e la "retta" sono accoppiati dualmente tra di loro nel piano. La nostra macchina magica arriva molto piú lontano, e di questo daremo subito qualche esempio. Cosí uno dei teoremi principali della teoria della dualità suona: "Ogni figura piana è la sezione di una figura centrale e ogni figura centrale è l'aspetto di una figura piana". Dobbiamo spiegare in linguaggio accessibile questa proposizione piuttosto stringata. Essa afferma né piú né meno che il piano e il fascio di raggi si corrispondono "dualmente". Questa è una delle verità fondamentali, uno dei principî piú profondi di tutta la geometria ottica. Infatti il cono di raggi che esce dal nostro occhio, dovunque colpisca, viene a intersecare un piano, il mondo riferito a un piano. Se ora io seguo internamente all'occhio questa "immagine del mondo", questo "piano d'intersezione", il cono centrale, il "pennello" di raggi non è altro che l'"aspetto" di questo mondo, la proiezione nell'occhio della sua immagine. Oltre il punto d'intersezione dei raggi ottici internamente all'occhio si manifesta ancora una volta il principio di dualità — adesso l'intersezione del pennello di raggi con la retina dà l'immagine, e questo pennello non è altro che l' "aspetto" dei punti d'intersezione.

Solo per questo motivo è possibile costruire su qualsiasi piano arbitrario l'immagine del mondo visibile. L'occhio stesso infatti "disegna" o "dipinge" secondo le leggi della cosiddetta prospettiva centrale, intendendosi con ciò un tipo di proiezione nel quale i raggi appartengono a un fascio centrale. Perciò solo una figura rappresentata in questa proiezione corrisponde realmente all'immagine del mondo che siamo abituati a vedere con l'occhio, e viceversa ogni figura rappresentata nella cosiddetta "prospettiva parallela" o "assonometria" appare piú o meno innaturale. E qui abbiamo anche la soluzione del mistero per cui non pos-

siamo vedere "in realtà" le rette parallele. Infatti la prospettiva centrale esclude il parallelismo, il che appare praticamente non appena le parallele acquistano una certa lunghezza, come per gli spigoli di un campanile o i binari della ferrovia sfuggenti in lontananza. Contrariamente a questa limitazione teorica siamo abituati a disegnare tutte le piante, le sezioni e in generale la maggior parte delle figure geometriche in prospettiva assonometrica; ciò dipende dal fatto che noi poniamo come base della nostra rappresentazione dello spazio rapporti di pura prospettiva parallela, facendo astrazione dal punto di vista dell'occhio e dalle sue proprietà proiettive. Dobbiamo però aver sempre chiaro in mente che noi prescindiamo consapevolmente da un'altra "realtà", quella della visione. Entra qui opportuna un'altra considerazione: nella rappresentazione delle figure geometriche d'ogni specie poniamo come base una supposizione derivata esclusivamente dall'esperienza che abbiamo del nostro mondo. Noi concepiamo infatti tutte le figure geometriche come corpi rigidi. Se non si potessero costruire sfere, cubi, triangoli, coni, piramidi, ottaedri, ecc. di legno, metallo o pietra, ma se viceversa potessimo solo formare triangoli e quadrati di carta assorbente bagnata o corpi solidi di sabbia o di qualche fluido, avremmo difficilmente ottenuto la nostra particolare geometria, perché in tal caso la rettilineità dei raggi luminosi da sola ci avrebbe difficilmente condotti a un edificio mentale così poderoso. Queste considerazioni, dovute a Henri Poincaré e a Hugo Dingler, devono indurci alla riflessione; non dobbiamo però prenderle come dimostrazione che la geometria sia derivata esclusivamente dall'esperienza. Tra il sorgere di concetti e di intuizioni *dall'esperienza* e in *base* all'esperienza vi è una grande differenza, già messa in rilievo da Kant. Abbiamo perciò il diritto di dire che il nostro modo di trattare la geometria si è sviluppato in questa forma per effetto delle nostre

facoltà mentali e dell'effettiva esistenza di corpi rigidi nel nostro mondo, da cui consegue la nostra rappresentazione prevalentemente assonometrica, non coincidente con la visione "reale" dello spazio e del suo contenuto materiale.

Con questa digressione abbiamo però interrotto il nostro esame del principio di dualità. Dicevamo che per ottenere il teorema di Brianchon da quello di Pascal non ci occorreva altro che la dualità tra punto e retta. Naturalmente avremmo potuto anche derivare con lo stesso bagaglio mentale il teorema di Pascal da quello di Brianchon, trattandosi di una relazione reversibile. Proposizioni di questo genere vengono spesso chiamate in modo suggestivo "speculari", cioè una di esse è l'immagine allo specchio della sua correlativa. Non si devono prendere troppo alla lettera questi "specchi", perché il nostro principio di dualità è in certo senso uno specchio deformante, trasforma infatti e inverte l'immagine primitiva nella contraria. Bisognerebbe parlare piú esattamente di specchi magici. Ancora una parola su questo argomento. È ovvio che la proposizione dalla quale si parte per trovare la correlativa dev'essere previamente dimostrata. Non è lecito considerarsi degli inventori quando si applica lo specchio magico del principio di dualità a una qualsiasi infondata affermazione geometrica. Il teorema di Pascal era stato dimostrato; di conseguenza Brianchon, se avesse conosciuto il principio di dualità, non avrebbe avuto bisogno di scoprire il suo teorema né di dimostrarlo indipendentemente. Possiamo perciò affermare quanto segue: allorché una proposizione di geometria proiettiva è stata dimostrata validamente ed esaurientemente, mediante il principio di dualità si può subito non solo enunciare la proposizione correlativa, ma anche fare a meno di dimostrarla. Purché naturalmente il principio di dualità sia usato bene, e tutte le sostituzioni vengano eseguite correttamente. A questo

scopo è utile soprattutto una notazione chiara e comprensiva.

Questa notazione, perfezionata logicamente e sempre piú estesa, ha portato infine alla conseguenza che, come abbiamo già accennato, la veste geometrica della "geometria proiettiva" è scomparsa all'improvviso, ed è rimasto un algoritmo algebrico, cosicché oggi si hanno libri di geometria, nei quali al posto di linee e di figure, non vi sono che lettere, indici e formule combinatorie. La vittoria della geometria sintetica su quella analitica ha portato in effetto ad una riconciliazione e a un accordo, ed è apparso chiaro, come spesso avviene nella storia della scienza, che si erano percorse due vie attraverso regioni distanti l'una dall'altra per arrivare a un'unica mèta ricchi di nuove conoscenze.

Oltre tutte le innovazioni teoriche, la "nuova geometria" ha portato con sé un enorme vantaggio pratico. Essa permette di eseguire un numero grandissimo di costruzioni, specialmente di sezioni coniche, con qualsiasi deformazione prospettica, senza l'aiuto del compasso. La costruzione "con la sola riga" è uno dei molti trionfi della "geometria moderna". Ma da questa geometria deriva un'altra possibilità di portata ancora piú vasta. Potendosi infatti col suo aiuto studiare le leggi generali di costituzione di tutte le figure e subordinarle all'algoritmo combinatorio, Grassmann, Schläfli e altri riuscirono a superare la limitazione della nostra geometria allo spazio tridimensionale. Se infatti la figura piú semplice della dimensione zero è il punto, e la figura piú semplice della retta è il segmento, nel piano o nello spazio bidimensionale (chiamiamolo R_2) la figura piú semplice o *simplex* è quella che non ammette alcuna diagonale. Questa figura, S_2, è il triangolo o trilatero. Esso ha $\binom{3}{1}$ angoli e $\binom{3}{2}$ lati, ovvero

$\binom{3}{1}$ lati e $\binom{3}{2}$ angoli, perciò sempre tre lati e tre angoli. In uno spazio tridimensionale R_3 otteniamo la S_3 considerando che R_3 non è determinato da soli 3 punti come il piano, ma da 4 punti non giacenti nello stesso piano. Secondo il calcolo combinatorio questi 4 punti vengono indicati con $\binom{4}{1}$, e possono venire collegati da $\binom{4}{2}$ rette e $\binom{4}{3}$ piani, essendo una retta determinata da 2 punti e un piano da 3. Il *simplex* di R_3 consta perciò di 4 punti, 6 rette e 4 facce. È il tetraedro. Possiamo andare avanti e dire che in R_4, cioè nella temuta "quarta dimensione", il *simplex* deve ubbidire alla legge $\binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4}$. Infatti uno spazio a quattro dimensioni, secondo quanto abbiamo visto finora, può essere determinato solo con cinque punti, poiché R_0 richiede un punto, R_1 due punti, R_2 tre punti ed R_3 quattro punti, e infine R_n richiede $(n + 1)$ punti per essere definito. Le nostre formule combinatorie non dicono altro se non che il *simplex* della quarta dimensione consiste di 5 vertici, 10 spigoli, 10 facce e 5 solidi delimitanti o "celle". In generale si può dire che il *simplex* della *n*-esima dimensione può essere descritto esaurientemente con la formula di costituzione $\binom{n+1}{1}, \binom{n+1}{2} \ldots \binom{n+1}{n}$.

Ma vi è di piú. L'algoritmo combinatorio della geometria moderna permette di enunciare rapporti e proprietà dei corpi negli spazi di un numero qualsivoglia di dimensioni. Cosí esiste una "legge delle sezioni" per spazi pluridimensionali che ci permette di calcolare la figura risultante dall'intersezione di due figure

con numero di dimensioni qualsiasi in uno spazio pluridimensionale arbitrario. Quando infatti i numeri indicanti le dimensioni di due figure n ed m sono inferiori al numero d indicante la dimensione dello spazio nel quale si devono intersecare, allora vale la relazione $(d+1) = (n+1) + (m+1) - (m \cdot n+1)$ ossia $d = n + m - n \cdot m$

dove $n \cdot m$ è il numero che dà la dimensione della figura risultante. Se perciò d, n ed m sono noti, allora $nm = n + m - d$. Chiediamoci ora di passaggio quale figura risulta per esempio dall'intersezione di una retta e di un piano nello spazio ordinario, cioè di un R_1 e di un R_2 in R_3. Secondo la formula $nm = 1 + 2 - 3 = 0$, ossia l'intersezione è un R_0, un punto, il che torna evidentemente. Nello spazio a quattro dimensioni anche due piani, secondo la $mn = 2 + 2 - 4 = 0$ s'incontrerebbero in un punto, così pure una retta e un solido secondo la $mn = 1 + 3 - 4 = 0$, cosa che noi non possiamo in alcun modo rappresentarci fisicamente. Nello spazio a cinque dimensioni due solidi si tagliano, in base alla $nm = 3 + 3 - 5 = 1$, in una retta e due rette $nm = 1 + 1 - 5 = -3$ in un punto, come nella geometria ordinaria, poiché i risultati negativi significano che vi sono ancora diversi gradi di libertà: possono cioè incrociarsi in due modi per noi inconcepibili e uno noto. In R_7 due solidi s'incrociano, in R_6 si tagliano in un punto, e così via.

Questa geometria pluridimensionale è certamente uno dei più perturbanti risultati della matematica del secolo decimonono poiché ci si presenta sotto un aspetto di cristallina chiarezza, ed è non per tanto impenetrabile. Dobbiamo fidarci più dell'algoritmo che dell'intuizione? Dobbiamo avventurarci sulle ali della ragione in uno spazio R_n, del quale conosciamo solo la formula magica, ottenuta estrapolando dal nostro R_3 secondo le leggi del calcolo combinatorio? Alcuni mate-

matici ci assicurano che in tutto questo non c'è nulla di misterioso, che tutto è innocuo al pari di a^4, a^5, a^6... a^n, non essendo altro che "calcolo", senza che vi sia sotto nulla da rappresentare, poiché tutto avviene nel regno della logica e del pensiero, in uno spazio puramente combinatorio. Gli spazi di dimensioni superiori non hanno nulla a che fare con l'esperienza o con la realtà. Ma non è provato del resto che lo spazio a noi noto sia tridimensionale: potrebbe essere anche adimensionale o metadimensionale.

Noi possiamo solo accennare a tutto ciò, tanto piú che l'ultima fase del problema è proprio dei nostri giorni. Non azzardiamo quindi alcuna conclusione, siamo viceversa del parere che il problema delle dimensioni, sorto dalla geometria proiettiva, debba svilupparsi e si stia sviluppando ancora sotto tutti i punti di vista, non ultimo quello filosofico, di critica della conoscenza.

Indipendentemente da tali interessantissime questioni, non possiamo tuttavia chiudere il capitolo senza dedicare qualche parola alla persona di Grassmann, il fondatore della teoria delle dimensioni. Egli nacque a Stettino nel 1809, studiò teologia e filologia e fu un autodidatta in matematica, non avendo mai seguito alcun corso. Ciò malgrado, nel 1840 sostenne l'esame di abilitazione all'insegnamento della matematica, volendo esercitare anche questa disciplina in qualità di insegnante. La sua *Teoria dell'espansione lineare* (1844) passò inosservata, e solo dopo i suoi successi come sanscritista (pubblicò un dizionario del *Rigveda*), come editore di poesie popolari tedesche e come giornalista, furono notate, specialmente da Helmholtz, le sue ricerche sulle correnti elettriche, la teoria dei colori e l'acustica; e questo favorí anche il riconoscimento dei suoi meriti matematici, tanto piú facile ora, in quanto nel frattempo diversi altri avevano percorso vie analoghe. Come insegnante Grassmann fu un martire, per-

ché i suoi allievi non gli ubbidivano affatto e le sue ore di lezione diventavano addirittura una battaglia. Questo specialmente perché il suo carattere non conteneva altro che bontà, modestia e affabilità. Come abbiamo detto, quest'uomo, singolare mescolanza di santità, di genio e di misantropia, ebbe in sorte di veder confermata l'esattezza delle sue idee, di assistere al loro successo e anche alla propria fama personale.

Con questa nota piuttosto malinconica chiudiamo il presente capitolo, assai movimentato dal punto di vista dei personaggi e dall'argomento. Torneremo in altra occasione su alcuni dei problemi qui delineati. E di nuovo, cosa strana, c'imbatteremo in una tragedia dopo l'altra, quasi che il contatto coi piú alti problemi della nostra scienza suscitasse l'ira degli dèi, come già nell'antica Grecia.

XIV

GALOIS

La matematica come generalizzazione

Si comprende facilmente come le equazioni d'ogni specie e i sistemi di equazioni siano stati sempre preferiti quale argomento d'indagine, in quanto da nessuna parte come nell'equazione si rivela la magía dell'algoritmo. Qualcosa ci è sconosciuto, e tutte le nostre meditazioni non servono a scoprirlo. Processi mentali, numeri, rapporti, prove, ci fanno confondere e falliscono. Prendiamo allora un pezzetto di carta, una matita, "impostiamo" l'equazione, ci abbandoniamo con curiosità e fiducia all'automatismo del procedimento, e otteniamo il risultato con tutta la precisione desiderata.

Ma no! Non sempre otteniamo questo risultato. Infatti quanto piú alto è il "grado" dell'equazione, tanto maggiori sono le difficoltà che si accumulano davanti a noi, e ci disilludono infine sull'arma che credevamo di avere già in mano. Ebbene, l'equazione è là. Se fosse risolta dovrebbe rispondere alla nostra domanda, a meno che il "grado" non lo impedisca.

Sappiamo dalle nostre indagini precedenti che quest'ostacolo si presenta assai presto. Già l'equazione di terzo grado, e peggio ancora la biquadratica o di quarto grado, richiedono artifizi complessi d'ogni genere, e anche questi falliscono nei casi "irriducibili". Ora non si può, specialmente nei problemi fisici o meccanici, prescrivere a priori all'incognita il grado massimo che deve assumere. L'ingegnere o il fisico si rivolgono per aiuto al matematico, e questi a malincuore deve scuo-

tere le spalle, se il caso non gli offre degli artifizi che permettano di ricondurre una equazione di grado piú elevato a un'altra di grado risolvibile.

Il peggio di questo punto oscuro, di questo scandalo della matematica (uno dei numerosi "scandali" della nostra scienza), era però che non si sapeva mai se era un'impossibilità o una semplice incapacità che sbarrava la via alla soluzione delle equazioni di grado superiore. Ancora nei secoli decimosettimo e decimottavo si sperava piú che mai che il futuro avrebbe portato a una chiarificazione, cosa tanto piú inverosimile in quanto Eulero aveva già riempito di nuova luce tutto il campo delle equazioni, e anche Cramer, Lagrange e piú tardi Cauchy avevano dato importanti contributi d'ogni genere alla teoria delle equazioni. Per tacere poi del cosiddetto "teorema fondamentale dell'algebra", il quale afferma che un'equazione deve possedere un numero di soluzioni uguale alla piú alta potenza dell'incognita contenuta nell'equazione. Questo teorema, sempre intuito e in parte anche utilizzato, appare sotto forma di semplice affermazione in Girard nel 1629, viene piú o meno presupposto da Descartes e dagli algebristi successivi, e infine stabilito in modo sicuro da D'Alembert nel 1746, finché negli ultimi decenni del secolo decimonono fu reso inattaccabile con diverse dimostrazioni, specialmente per opera di Gauss.

Lasciamo però adesso l'esposizione dei problemi teorici, ai quali per il nostro scopo basta solo accennare, per rivolgerci a due biografie, i cui eroi saranno per sempre legati con le piú profonde indagini sulle equazioni. Intendiamo parlare di Niels Henrik Abel e di Evariste Galois.

Abel, figlio di un pastore protestante, nacque a Finhö in Norvegia e fu segnato in triplice modo dal destino in un'età in cui gli altri ragazzi, con le guance rosse e coi loro sogni di felicità futura, si trastullano in mezzo

alla neve. Povertà, consunzione e malinconia lo accompagnarono come tetri tutori in una vita che, indipendentemente dalla sua innata capacità, non doveva essere una vera vita. Malgrado tutto, ardeva nel debole petto di questo nordico un indomabile spirito faustiano, che si rivolse in modo particolare alle matematiche, e lo rese capace fin da giovinetto di penetrare addentro nella nostra scienza, benché puro autodidatta. Già nel 1822 lo troviamo all'università di Cristiania, e nel 1823 una scoperta di interesse mondiale sembra portare per la prima volta un po' di luce in quest'anima tetra. Egli crede infatti di aver trovato per primo nella storia della matematica il metodo generale per la risoluzione dell'equazione di quinto grado. La tragedia degli anni seguenti è a mala pena concepibile. Possiamo solo intuire come nelle notti di febbre egli abbia visto la sua "scoperta" cadere poco alla volta in pezzi, e perciò sparire per sempre e perdersi in fumo la felicità per un istante sognata. Disperato, nel 1824 egli porta il colpo decisivo contro se stesso, dimostrando, anche questa volta per primo, che l'equazione di quinto grado non è risolubile con estrazioni di radice. Il suo destino prende un'altra piega. Si riconosce subito "in alto luogo" l'enorme importanza di questo risultato apparentemente negativo, che pone una volta per tutte un limite ben definito alle indagini ed evita tentativi superflui, e gli viene destinata una sovvenzione degna di questo nome. Nuove speranze di Abel, il quale va a Berlino a trovare l'architetto Crelle, fondatore dal 1826 del famoso "Crellesches Journal", pubblicazione matematica di prim'ordine, e personaggio assai meritevole per tutta la sua attività di organizzatore nel campo della matematica. In questa rivista Abel pubblica le sue fondamentali scoperte sulle equazioni di quinto grado e sulla convergenza della serie binomia, quest'ultimo studio eseguito sotto l'influenza di Cauchy. Nel 1826 Abel si reca a Parigi per visitare il già cele-

berrimo Cauchy, che egli onorava di lontano come maestro. Ma Cauchy, che aveva un carattere spesso poco in armonia con le opere e andava soggetto a frequenti attacchi d'invidia e di cattiveria, non volle riceverlo. Anche questa tragedia si può difficilmente concepire. Con gli ultimi centesimi della sua sovvenzione, col provento penosamente raggranellato di qualche lezione, Abel era arrivato fino a Parigi per trovare tutte le porte chiuse proprio là dove, oltre ogni interesse, lo spingeva anche una grande sete spirituale. Ma neanche ora l'infelice giovane, il cui male peggiora di continuo, si lascia piegare. Al contrario, il suo genio si eleva ancora una volta in un'impresa gigantesca, scoprendo e pubblicando il teorema che ha preso il suo nome, e rappresenta una generalizzazione del teorema di Eulero sulla somma di integrali ellittici. Osserviamo qui soltanto che gli "integrali ellittici" sono, in via approssimativa, degli integrali nei quali la variabile appare sotto una forma irrazionale complicata, come per esempio

$$\int \sqrt{(a_1 x^3 + \ldots a_4 x^0)}\, dx$$

oppure

$$\int \sqrt{(a_1 x^4 + \ldots a_5 x^0)}\, dx$$

A questi integrali si arriva spesso in pratica, e la loro difficoltà di risoluzione era da lungo tempo conosciuta, sicché in questo campo si facevano sempre nuovi tentativi. Abel riuscí a far luce su questi integrali e a eseguire la divisione della "lemniscata" (una curva di ordine superiore), divisione che è in stretto rapporto con gl'integrali ellittici. Durante quest'epoca ottenne anche notevoli risultati nel campo dei numeri complessi.

Nel viaggio di ritorno da Parigi Abel aveva l'intenzione di conferire con Gauss, la cui fama era allora già allo zenit, ma la sua esperienza con Cauchy lo

aveva talmente scoraggiato, che all'improvviso lo assalirono scrupoli cosí forti da arrivare fino alla paura. Mortalmente ammalato, corse a Cristiania, dove si aggirò per breve tempo soffrendo il freddo e la fame per trovare un impiego, sia pur modesto. Ma anche quest'umile aspirazione gli fu negata. Morí nel 1829. Pochi giorni dopo la sua morte, arrivò a Cristiania una lettera di chiamata a Berlino, di grande valore materiale e morale, e nel 1830 l'Accademia francese delle scienze assegnò un premio alla sua memoria.

Ci risparmiamo ogni commento a questo inferno, in cui venne a trovarsi un genio che con un po' di buona volontà avrebbe dovuto essere riconosciuto come tale. Ogni lettore della rivista di Crelle, e cioè tutto il mondo scientifico, doveva saperlo; anche Gauss, questo misteriosissimo tra tutti gli uomini eminenti, del quale solo dopo la sua morte fu appurato che conosceva per conto proprio già nel primo decennio del secolo decimonono, cioè con venti anni di anticipo, quasi tutti i risultati ottenuti da Abel, e li aveva taciuti. Meglio di tutti lo sapeva però Jacobi, il quale fu probabilmente causa inconsapevole della prematura morte di Abel, poiché questi si consumò in una lotta accanita nella costruzione della teoria degli integrali ellittici studiati anche da Jacobi. Non vogliamo però spargere lacrime farisaiche, poiché ognuno di noi ha avuto occasione di aiutare indegni e di piantare in asso persone meritevoli; ed è quasi un destino, per molti uomini, quello di essere giustamente valutati, senza che ci si risolva a far nulla per loro.

La sventura di Abel si trasferí a un altro giovane, il cui destino fu altrettanto tragico quanto quello di Abel, benché la catastrofe finale sia dipesa non da cause esterne ma dal suo intimo. Nel 1811 nasceva a Bourg-la-Reine presso Parigi un fanciullo, che ebbe nome Evariste Galois. Già nel 1823 Galois dovette lasciare la casa paterna, per entrare nella quarta classe del col-

legio *Louis le Grand*. All'età di quindici anni si rivelarono in lui straordinarie attitudini matematiche, al punto che trascurava affatto i libri scolastici, per immergersi nello studio dei classici della matematica che si conoscevano allora, soprattutto del grande Lagrange. Picard, al quale siamo debitori di questi e altri dati biografici, dice che Galois all'età di soli 17 anni sembrava fosse in possesso di conoscenze matematiche di grandissima portata. Purtroppo questi suoi primi lavori, da lui presentati all'Accademia delle Scienze, sono andati perduti.

A quel tempo era straordinariamente in auge a Parigi l'École Polytechnique, da noi già nominata. Questa scuola, fondata dall'ingegnere militare Monge, in pochi decenni aveva fatto tutto il possibile affinché il governo della Francia passasse nelle mani di matematici e ingegneri, circostanza questa i cui effetti sono ancor oggi di grande importanza strutturale e politica per la Francia. Infatti una "tecnocrazia" mostra tratti diversi da una "giuristocrazia" o da una "letteratocrazia", come quella che per millenni dominò in grande stile la Cina.

Era dunque naturale che un giovane della specie di Galois considerasse l'École Polytechnique come suo primo trampolino. Si presentò nel 1829, cioè a 18 anni, per l'esame di ammissione, ma fu bocciato due volte, perché si rifiutò di rispondere a domande che gli sembravano ridicole e superflue, come per esempio quella sulla teoria aritmetica dei logaritmi.

Con questo strano evento, cioè l'insuccesso in un esame di matematica di un uomo dal quale le piú grandi menti dell'epoca avrebbero potuto imparare qualche cosa, comincia la tragedia di Galois. Picard dice che era come se l'infelice giovane dovesse pagare caro il prezzo del proprio genio. Nella stessa misura in cui si sviluppavano le sue facoltà matematiche, si vedeva oscurarsi il suo carattere, una volta gaio e

aperto; il sentimento della sua enorme superiorità aveva suscitato in lui un orgoglio esagerato.

Per farla breve, Galois, profondamente offeso, finí per frequentare l'École Normale Supérieure, anch'essa fondata da Monge. Ma dopo un anno appena dovette lasciare questa scuola "per condotta sconveniente". Spezzato qualsiasi legame con la vita civile, Galois si getta nella politica, viene arrestato, passa diversi mesi dietro le sbarre della prigione di Sainte-Pélagie, senza però perdere di vista la matematica malgrado tutti questi avvenimenti. Non abbiamo altri dati che ci permettano di scrivere la storia del periodo precedente l'ultima catastrofe. Possiamo solo intuire qualche cosa, quando guardiamo questo ostinato viso di ragazzo, dall'aspetto quasi russo, in una vecchia incisione. Ci appare allora chiaro che questo essere troppo giovane, questo ragazzo agile e snello, è stato distrutto dal suo dèmone. Si dice che da una storia d'amore nacque una contesa che portò a un duello. Forse la fidanzata, la sposa, l'amante di un altro aveva concesso al giovane il suo affetto. Forse. Di certo sta che Galois non si sottrasse al suo dovere di uomo, pur sapendo che come genio era insostituibile. Cadde in questo duello il 31 maggio 1832, non ancora ventunenne.

Nella notte antecedente alla sua morte, che egli sembra aver preveduta, scrisse una lettera al suo amico Chevalier. Questo è uno dei documenti piú impressionanti della storia dello spirito, poiché sotto ogni riga spuntano le dita ossute e le occhiaie vuote della spietata sterminatrice, e nella disperata concisione della stesura appare lo sforzo di esaurire in poche righe tutto ciò che avrebbe richiesto probabilmente diversi anni per arrivare a maturazione.

Anche qui però non vogliamo cavillare e soprattutto non vogliamo criticare un uomo che morí alteramente senza mostrare nel suo "testamento" alcuna pusillanimità o debolezza. Proprio Galois col suo esempio

luminoso dà la migliore dimostrazione che la matematica è cosa da uomini nel miglior senso della parola, superiori alla misura comune. La matematica è quasi un servizio reso alla divinità, è missione e illuminazione, vicinanza a Dio ed ebbrezza di verità. È chiaro ed evidente che non tutti possono né devono occuparsi di matematica; ma è altrettanto certo che la negazione della matematica è un delitto contro lo spirito, contro la cultura e il progresso dell'umanità. Eravamo debitori di queste parole ai mani di uomini come Pitagora, Archimede, Leibniz e Galois.

Lasciamo ora da parte il destino terreno di questo valoroso giovane, la fugace apparizione a guisa di cometa di un'esistenza troppo presto annientata, per far risaltare piú chiaramente tutto quello che mediante l'opera di Galois è diventato patrimonio cospicuo e forse eterno della matematica. E nell'aula d'onore che edifichiamo alla memoria del fiero ragazzo, scriveremo a lettere d'oro: "teoria dei gruppi". Questo di primo acchito ci dice poco, benché l'espressione contenga quasi tutti i concetti piú elevati della matematica moderna, specialmente dell'algebra, ciò che ha indotto menti di prim'ordine, come per esempio Spengler, a ritenere che mediante questa teoria la matematica abbia raggiunto una perfezione e una generalità insuperabili e sia condannata a irrigidirsi per sempre. Noi non siamo di questo parere, poiché tutta la storia ci insegna a diffidare di simili "stadi finali" della conoscenza. Dobbiamo tuttavia mettere bene in evidenza che la parola "generalizzazione" è assai giusta per quanto si riferisce alla teoria dei gruppi; entro i limiti impostici non siamo però nella posizione migliore per dimostrarlo, in quanto dovremmo scrivere tutto un libro per spiegare solo una metà di questa teoria in modo esauriente e scientificamente ineccepibile. Malgrado queste limitazioni, ci sentiamo obbligati a non accontentarci, come fanno certi libri di

storia, di soli nomi e termini tecnici. Pensiamo del resto che una conoscenza approssimata sia migliore di una completa ignoranza, tanto piú che spesso le persone capaci e desiderose d'imparare vengono indotte da brevi cenni di questo genere a procurarsi una conoscenza completa presso i maestri dell'arte.

Il concetto di gruppo è per la matematica moderna altrettanto fondamentale e proficuo quanto per esempio i concetti di grandezza, misura, funzione e quantità; è soltanto piú astratto e generale di tutte queste categorie matematiche. Perciò cercheremo di avvicinarci alla mèta lentamente e per vie diverse. Per noi significa poco, chiamare col nome di "gruppo" un sistema di cose che deve possedere certe proprietà, cosiddette proprietà del gruppo. Cos'è un "sistema" e quali sono queste" cose"? Rispondiamo che le cose costituenti il sistema possono essere assai diverse. Ci esprimeremo presto con maggior precisione; vogliamo però anzitutto portare alcuni esempi presi dalla matematica. Avremo dunque dei "sistemi di cose matematiche" — benché in generale non occorra che si tratti di cose matematiche. Ma non vogliamo confondere troppo le idee e spiegheremo per il momento in modo vago che, per esempio, tutti i numeri naturali costituiscono un gruppo. Cosí tutti i logaritmi, oppure tutta la geometria elementare, o tutte le permutazioni che si possono fare con *n* elementi. O ancora tutte le equazioni di una certa forma, per esempio tutte le equazioni algebriche. O tutti i numeri che, divisi per un certo numero, dànno lo stesso resto, e cosí via.

Ora però lo scopo della teoria dei gruppi non è la semplice enunciazione che una certa pluralità o sistema di cose appartiene a un gruppo. Essa mira viceversa ad ottenere criteri esatti per stabilire se si è veramente in presenza di un "gruppo". Da questo dipende infatti se si può operare col gruppo come tale,

cioè se esso si può mettere in rapporto con altri gruppi, o se dalle relazioni interne di un gruppo si possono dedurre delle relazioni valide per un altro gruppo. Per chiarire questo pensiero ci richiameremo a un esempio per noi familiare, cioè ai logaritmi. Ammettiamo senza dimostrazione che i logaritmi dei numeri razionali costituiscano realmente un gruppo e che i numeri razionali siano anch'essi un altro gruppo. Entrambi sono in ogni caso gruppi infiniti, dato che si hanno infiniti numeri razionali e infiniti logaritmi corrispondenti. I numeri e i logaritmi sono i cosiddetti "elementi" dei due gruppi. La teoria dei gruppi richiede però come prima proprietà che vi sia una regola collegante univocamente un elemento S con un altro elemento T del sistema, cioè una regola che definisca un certo ST, dove la specie della relazione non è ancora stabilita. S e T potrebbero essere anche identici. È lecito dunque sommare, sottrarre, dividere, moltiplicare, ecc. questi due elementi, ma però — e questa è la seconda proprietà dei gruppi — il risultato di questa relazione dev'essere sempre un elemento del sistema. Nel caso dei numeri razionali questa proprietà ci è familiare: il prodotto di due numeri razionali è sempre un altro numero razionale. Ma anche la somma di due logaritmi è ancora un logaritmo. Per il nostro esempio abbiamo fissato relazioni concrete, il che è naturalmente ammissibile, anzi necessario nei casi concreti. Altra proprietà dei gruppi è la proprietà associativa, la quale afferma che $(ST)\ U$ è sempre uguale a $S\ (TU)$, che cioè si possono raccogliere insieme gli elementi in complessi arbitrari senza alterare il risultato. Così è sicuramente $(3 \cdot 5) \cdot 8$ la stessa cosa di $3 \cdot (5 \cdot 8)$ e del pari $(\log 3 + \log 5) + \log 8$ è la stessa cosa di $\log 3 + (\log 5 + \log 8)$. Non viene richiesta per i gruppi la proprietà commutativa, poiché proprio i gruppi non commutativi sono quelli che offrono il maggiore interesse. Diciamo "non viene

richiesta": con questo intendiamo esprimere che il concetto di gruppo non esiste in natura, ma nasce da una definizione, la quale, come un qualunque sistema di assiomi, potrebbe anche suonare diversamente. Ma su tali questioni fondamentali, tra le piú difficili della matematica, non possiamo soffermarci per ora. Passiamo perciò alla quarta proprietà dei gruppi, la quale richiede che nel sistema sia presente un elemento unitario capace di lasciare invariato un qualsiasi elemento del sistema nello speciale tipo di relazione scelto, come sarebbe l'unità 1 nel caso di numeri razionali collegati tra loro dall'operazione di moltiplicazione. Infatti, ogni numero razionale, moltiplicato per uno, riproduce lo stesso numero razionale. Nel caso dei logaritmi collegati dall'addizione, l'elemento unitario, in senso generale, è il logaritmo della potenza nulla della base, cioè $\log_a a^0$, che deve dare sempre come risultato lo zero. Infatti, se io aggiungo a qualsiasi logaritmo questo logaritmo, il primo rimane invariato. Nel caso dei logaritmi di base 10, $\log 10^0 + \log n$ ossia $\log 1 + \log n$ è sempre ancora $\log n$. Infine la quinta ed ultima proprietà dei gruppi richiede che per ogni elemento S del sistema esista un elemento inverso o reciproco, il quale nella relazione prescritta formi con l'elemento dato l'unità. Nel caso della moltiplicazione di numeri razionali questo elemento inverso non è altro che il valore reciproco dell'elemento. Infatti, per esempio, $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$, che corrisponde alla nostra condizione. Nel caso della somma di logaritmi questo elemento inverso è $-\log_a n$, poiché sommato a un qualsiasi $\log_a n$ dà anch'esso l'"unità" $\log_a a^0$, cioè zero.

Tutto ciò appare, considerato superficialmente, come un giuoco vano o un circolo vizioso, oppure — nella migliore ipotesi — come un'indagine logica sui

sistemi. Viceversa sulle proprietà e sulle definizioni sopra citate è stato costruito tutto un algoritmo, che permette di dedurre dalle condizioni esistenti in un gruppo noto e accessibile quelle di un altro gruppo. Se per esempio due gruppi sono "isomorfi", gli elementi dei due gruppi possono essere ordinati in modo tale che, a parità di legami nei due gruppi, l'unione di due o piú elementi di un gruppo produce un risultato che è allo stesso posto del risultato della unione degli elementi corrispondenti del secondo gruppo. Quando si riesce a constatare che, come nel nostro esempio dei numeri razionali e dei logaritmi, l'addizione in un gruppo dà come risultato la "posizione analoga" ottenuta con la moltiplicazione nell'altro gruppo o viceversa, allora si è davanti a una trasformazione, e si può essere certi che questa legge deve conservarsi in ogni modo. Si obietterà che la "proprietà logaritmica" può essere dimostrata in modo del tutto generale senza bisogno della teoria dei gruppi. Ciò è vero in questo caso particolare, che abbiamo scelto come esempio per la sua elementare notorietà, ma non in molte altre indagini e trasformazioni. Non è vero, per esempio, in tutte le trasformazioni chiamate volgarmente "sostituzioni", delle quali abbiamo visto qualche esempio nelle equazioni di Diofanto o di Cardano. Solo mediante la teoria dei gruppi è stato possibile prevedere addirittura in molti casi quali trasformazioni delle equazioni avrebbero condotto alla mèta e quali no. Naturalmente è assai difficile determinare le proprietà di gruppo nei singoli casi. Esistono per questo determinati teoremi e metodi, che ci permettono di dedurre da certe proprietà la loro effettiva esistenza, benché queste proprietà non abbiano a prima vista nulla a che fare con le cinque proprietà dei gruppi da noi descritte.

In breve, esiste già tutto un algoritmo dei gruppi e non solo dei gruppi concreti. È stato creato infatti

il concetto di "gruppo astratto", che ha anch'esso il proprio algoritmo e mediante il quale si può indagare la struttura piú generale dei gruppi. L'altezza di astrazione cosí raggiunta dà addirittura le vertigini, poiché sopra l'algebra o la geometria viene costruito in primo luogo un secondo edificio piú generale, l'edificio di queste discipline concepite dal punto di vista della teoria dei gruppi; al di sopra di questa supergeometria e superalgebra si trova poi in terzo luogo la teoria astratta piú generale dei gruppi, che tratta questi fasci di geometrie o di equazioni o di sistemi nello stesso modo come l'algebra ordinaria tratta i numeri concreti.

Col nostro tappeto magico siamo arrivati fino ai tempi piú recenti. Infatti lo sviluppo della teoria dei gruppi ora accennato ebbe luogo dopo Galois, per opera di Camille Jordan, Sophus Lie e Felix Klein, tanto per citare i nomi piú importanti. Ma ora dobbiamo ritornare al tragico eroe di questo capitolo, a Evariste Galois, il quale nel suo impressionante "testamento", in quella lettera a Chevalier scritta nella sua ultima notte terrena, enunciò i concetti fondamentali della costituzione dei gruppi in parole crude, spesso misteriose, e pregò l'amico non solo di pubblicare il contenuto della lettera, ma di farne parte specialmente a Gauss e Jacobi. Non, come dice Galois, per avere un giudizio sulla giustezza dei risultati; ma a motivo della loro enorme "importanza".

Galois fu allievo di Lagrange e di Cauchy, di cui specialmente il secondo aveva già intuito una specie di teoria dei gruppi riferita al campo speciale delle equazioni. Galois conosceva i risultati di Abel, sapeva che era svanita per sempre la speranza di risolvere mediante estrazioni di radice le equazioni superiori al quarto grado. Naturalmente erano risolvibili alcuni casi speciali, in cui si riesce mediante artifizi o trasformazioni (sostituzioni nel senso ordinario) ad

abbassare il grado dell'equazione fino al quarto e ancor meno. Questa possibilità non si può però giudicarla a priori, e tanto meno si può affermare in un modo che sia appena attendibile l'impossibilità di una tale trasformazione. Galois affrontò questo problema, e la via da lui indicata è così profonda e geniale, che il nome di Galois rimarrà per sempre tra quelli dei più insigni matematici. Egli pose infatti il problema generale: come si devono presentare i coefficienti in un'equazione di grado n perché l'equazione diventi risolubile mediante riduzione. La risolubilità non poteva dipendere dalle potenze dell'incognita, dato che con diversi coefficienti le equazioni con le stesse potenze dell'incognita erano una volta risolvibili e un'altra no. Qui Galois introdusse il sistema di trattazione mediante la teoria dei gruppi proprio dove essa è più complicata, cioè nei gruppi di permutazioni. Un gruppo di permutazioni è sicuramente un gruppo finito, poiché la possibilità di permutare deve avere un termine, quando il numero degli elementi da permutare è un numero finito. Il numero delle permutazioni possibili allora è n; o, come si dice, "fattoriale di n" $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n$. Sotto il nome di permutazione si possono intendere due cose. In primo luogo una diversa disposizione degli elementi; così per esempio 1243 è una permutazione di 1234. Si può anche designare come permutazione l'operazione di permutare, e cioè l'operazione con cui si passa da una disposizione ad un'altra. La teoria dei gruppi intende il concetto di permutazione in questo secondo senso, e lo chiama sostituzione nel significato più generale della parola. Un raggruppamento viene "sostituito" all'altro, i singoli passaggi o permutazioni o sostituzioni, comunque si voglia chiamarli, vengono concepiti come elementi del gruppo di permutazioni, in cui possono presentarsi anche permutazioni identiche, come 123 che diventa ancora 123. Ora due permutazioni delle stesse cifre,

come per esempio 123 che è diventato 312 e 123 diventato 132, possono essere collegate tra di loro in modo tale da venire eseguite successivamente. La prima permutazione sostituisce 1 con 3, la seconda 3 con 2, le due insieme, eseguite una dopo l'altra, sostituiscono 1 con 2. In seguito 2 viene sostituito con 1 e 1 con 1, cioè in complesso 2 con 1. Infine 3 è sostituito con 2 e 2 con 3, cioè 3 con 3. Il risultato di queste operazioni è ancora un elemento del gruppo, cioè 213, un'altra permutazione di 123. Si può proseguire in questo modo, rendendo il procedimento piú semplice e sicuro con una scrittura adatta. Una spiegazione particolareggiata oltrepasserebbe i nostri limiti: ci limitiamo a dire che, secondo i nostri accenni, è possibile costruire dalle permutazioni dei veri gruppi, i quali posseggono tutte le proprietà di gruppo. Ora Galois — a questo volevamo arrivare — studia le permutazioni dei coefficienti di equazioni qualsiasi, e costruisce cosí da una equazione tutto un gruppo di equazioni. Si esaminano poi i gruppi di sostituzioni o di permutazioni, per vedere se è possibile ottenere dei sottogruppi. Quest'analisi è lo scopo principale di tutto il procedimento, poiché un tale sottogruppo può senz'altro rappresentare o contenere una forma risolubile di un'equazione. Quando si possa inoltre scoprire come il gruppo principale viene costituito a partire da un certo sottogruppo, il problema è risolto. Ripetiamo per maggior chiarezza: il primo passo è la costruzione del gruppo di permutazioni dei coefficienti dell'equazione proposta. Il secondo è la scomposizione in sottogruppi, dei quali l'uno o l'altro, mediante scomparsa (annullamento) di coefficienti, conduce a una equazione al massimo biquadratica. Il terzo passo è il tentativo di costituire da questo sottogruppo il gruppo principale. Se questo riesce, allora l'equazione di grado n (dove $n>4$) è risolubile, cioè

riducibile ad equazioni che si possono risolvere mediante estrazioni di radice.

Non si riesce a concepire come un giovane non ancora ventunenne abbia potuto penetrare la costituzione dei gruppi, prima di lui sviluppata solo a metà proprio nel punto piú difficile, tanto da valorizzarla praticamente. E tutti coloro che esercitano un'attività intellettuale fanno fatica a raffigurarsi quest'opera, che, in mezzo ad avversità, lotte politiche, prigionia, amori e duelli, fu portata cosí avanti da poter essere formulata chiaramente in quell'ultima notte. La teoria dei gruppi occupa poi solo la prima parte della lettera, mentre la seconda parte contiene cognizioni altrettanto stupefacenti sugli integrali ellittici, che solo Riemann e Weierstrass riuscirono a interpretare.

La lettera termina con parole cosí impressionanti nella loro semplice grandezza, che non possiamo fare a meno di riprodurle: "Non ho piú tempo e le mie idee in questo campo infinitamente vasto non sono ancora ben sviluppate. Farai stampare questa lettera nella 'Revue encyclopédique'. Nella mia vita ho spesso osato lanciare proposte delle quali non ero ancora sicuro; ma tutto ciò che ho scritto è già da un anno nella mia mente, e ne va troppo del mio interesse che io non mi sia ingannato, onde evitare che mi si accusi di enunciare teoremi dei quali non posseggo la dimostrazione completa. Pregherai Jacobi o Gauss di esprimere la loro opinione, non sulla verità, ma sull'importanza dei miei teoremi. Dopo tutto ciò vi sarà qualcuno, io spero, che troverà vantaggioso decifrare questo guazzabuglio. Ti abbraccio col piú grande affetto...".

Queste sono le ultime parole pronunciate dal giovane immaturamente scomparso nell'eternità. Tutti i suoi lavori sono nell'edizione di Picard contenuti in un sottile volumetto di 61 pagine. La sua opera dette però un tale impulso alla generalizzazione della matematica, che Galois dev'essere chiamato a buon diritto,

insieme ad Abel, il creatore dei principî fondamentali dell'algebra moderna.

Abbiamo già detto che la teoria dei gruppi fu costruita specialmente da Jordan. Nel frattempo però si svilupparono diverse scoperte precedenti, fornendo nuove armi alla generalizzazione dell'algebra. Abbiamo già citato una di queste scoperte, i determinanti. In una lettera a L'Hospital, Leibniz aveva espresso chiaramente e senza possibilità di equivoci il principio di questo potente algoritmo, e dev'essere stato certo consapevole della sua grande portata. Infatti alla fine della lettera scriveva: "Si vede qui dimostrato ciò a cui ho fatto cenno occasionalmente, che cioè il perfezionamento dell'algebra dipende dal calcolo combinatorio". Tuttavia Leibniz, o per mancanza di tempo o perché l'analisi infinitesimale gli sembrasse piú urgente e importante, non sviluppò i promettenti inizi delle sue scoperte di algebra combinatoria, e il suo contributo in questo campo fu completamente dimenticato, al punto che Gabriel Cramer fece la stessa scoperta nell'anno 1750, ed è considerato a buon diritto come il vero inventore dei determinanti, dato che tutti i suoi successori costruirono sui principî da lui stabiliti, specialmente Laplace, Lagrange, Gauss e Cauchy. Quest'ultimo adoperò per la prima volta l'espressione "*determinante*", ma la lasciò poi cadere, sostituendola con quella di "*fonction alternée*".

Fu Carl Gustav Jacob Jacobi, con la sua opera apparsa nel 1841, *Sulla costruzione e le proprietà dei determinanti*, a introdurre definitivamente questa categoria nel patrimonio comune dei matematici.

Piú tardi un matematico inglese, il Sylvester, il quale generalizzò la teoria dei determinanti nella teoria degli invarianti, ebbe occasione di dire: "Che cos'è in fondo la teoria dei determinanti? È un'algebra sopra l'algebra, un procedimento di calcolo che ci mette in grado di combinare e di prevedere i risultati delle

operazioni algebriche, cosí come con l'aiuto dell'algebra ci possiamo dispensare dall'eseguire le particolari operazioni dell'aritmetica".

Queste parole, dette da un personaggio cosí illustre, ci fanno nuovamente rizzare le orecchie, come quando abbiamo udito che la teoria dei gruppi, esaminata piú da vicino, si rivela come un'algebra dell'algebra. Che cosa sono dunque — si sentirà autorizzato a chiedere chiunque ci ha seguiti fin qui — questi misteriosi determinanti, dei quali diciamo ancora che nell'epoca tra Cramer e Jacobi erano una specie di scienza segreta o privata dei piú famosi matematici?

Per rispondere a questa domanda, dobbiamo tornare un poco indietro. Tutti gli algebristi, da Leibniz in poi, nei loro calcoli urtarono sempre contro un ostacolo insormontabile. Se cioè si volevano indicare le soluzioni generali di un sistema di equazioni costituito da un numero di equazioni appena un po' elevato, i cosiddetti "sistemi di risoluzione" diventavano cosí complicati da riempire intere pagine, con che era anche spalancata la porta a errori d'ogni genere. Se d'altra parte si voleva risolvere in generale un sistema di un numero qualsiasi n di equazioni non si aveva a disposizione alcun algoritmo e nessuna notazione che permettesse di farlo. E proprio queste soluzioni generali erano quelle che si cercavano, per diversi motivi, in parecchi campi dell'algebra e della geometria.

Per dare una spiegazione approssimata del concetto di "determinante" (era questo poi l'istrumento che si cercava), ci serviremo di un esempio semplice, senza addentrarci negli innumerevoli problemi singoli. Supponiamo di avere due equazioni che chiameremo semplicemente f_1 ed f_2. Si tratta di due equazioni lineari, ciascuna con due incognite. Esse sono:

$$f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + c_1 = 0$$
$$f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + c_2 = 0$$

Sarà subito chiaro perché scriviamo i coefficienti con i doppi indici, introdotti da Leibniz. Non si tratta qui infatti di «*a* undici» e «*a* dodici», ma di «*a* uno uno», «*a* uno due», e così via. La prima cifra del doppio indice mostra la "riga", e la seconda la "colonna". Lo schema generale dei doppi indici è perciò

$$
\begin{array}{l}
11, 12, 13, 14 \ldots\ldots 1n \\
21, 22, 23, 24 \ldots\ldots 2n \\
31, 32, 33, 34 \ldots\ldots 3n \\
41, 42, 43, 44 \ldots\ldots 4n \\
\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n1, n2, n3, n4 \ldots\ldots nn
\end{array}
$$

Riferito alle nostre equazioni, a_{53} significa per esempio il coefficiente della terza incognita x_3 nella quinta equazione del sistema.

Ciò premesso, passiamo a trattare le nostre due equazioni. Se noi eliminiamo una delle incognite, moltiplicando la prima equazione per a_{22} e la seconda per $-a_{12}$, poi la prima per a_{21} e la seconda per $-a_{11}$, e sommando poi le due equazioni, otteniamo come "sistemi di soluzioni" i valori:

$$x_1 = -\frac{a_{22}c_1 - a_{12}c_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \text{ e } x_2 = -\frac{a_{11}c_2 - a_{21}c_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Vediamo subito che al denominatore nei due casi si trova la stessa grandezza. Cioè $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Se questa espressione fosse uguale a zero, non vi sarebbero soluzioni. Perciò questa espressione "determina" il sistema di equazioni, è il suo "determinante". Questo però è appena uno dei compiti della teoria dei determinanti e finora la spiegazione di un termine. Una scrittura apposita e la cognizione che il determinante ha un carattere puramente combinatorio furono la chiave di tutto il resto. S'inventò dunque per la scrit-

tura di questa importante grandezza la forma $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, la quale, come qualsiasi altro segno di operazione, ha le proprie regole. Nel nostro caso si moltiplicano semplicemente le diagonali, sottraendo dalla prima diagonale $a_{11}a_{22}$ la seconda $a_{12}a_{21}$.

Con questo sistema diventò possibile tutta un'algebra dei determinanti, nella quale gli schemi analoghi posti tra due linee vengono trattati come nuovi "supernumeri" e sommati, sottratti, moltiplicati, perfino differenziati. Vi è inoltre un gran numero di regole e di teoremi che ci permettono di trovare subito proprietà d'ogni genere di questi determinanti. È facile vedere, per esempio, quando un determinante è nullo, il che significa poi che il sistema di equazioni corrispondente non ha soluzioni.

Affinché il lettore abbia almeno un'idea del funzionamento pratico dei determinanti come mezzo per la risoluzione di equazioni, daremo un esempio numerico concreto della massima semplicità. Supponiamo di dover risolvere mediante i determinanti le due equazioni:

$$3x+4y+1=0 \quad \text{e} \quad 5x+2y+6=0$$

Se siamo già abbastanza pratici nella rappresentazione degli indici secondo la giusta sequenza, e se pensiamo che i coefficienti 3 e 4 della prima equazione rappresentano a_{11} e a_{12} e i coefficienti 5 e 2 della seconda equazione a_{21} e a_{22}, sappiamo già che il determinante dev'essere $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$, il quale dà $3 \cdot 2 - 4 \cdot 5 = -14$ come risultato. Questa però non è altro che la garanzia della risolubilità del sistema. Le soluzioni sono:

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}$$

poiché anche i numeratori si possono ottenere sotto forma di determinanti, secondo certe leggi che risultano dal sistema di soluzioni di cui sopra. Senza entrare in particolari, mostriamo solo il calcolo finale:

$$x = -\frac{-22}{-14} = -\frac{22}{14} \text{ e } y = -\frac{13}{-14} = \frac{13}{14}$$

Questi risultati sostituiti nelle equazioni di partenza si dimostrano esatti.

Vogliamo aggiungere alcune altre parole generiche. Con l'impiego dei determinanti è possibile scrivere d'un sol tratto la soluzione di un sistema di equazioni con un numero qualsiasi d'incognite. Si deve trattare però di equazioni lineari, cioè di equazioni in cui tutte le incognite appaiono alla prima potenza. Mediante l'operazione coi determinanti viene rilevata l'intima struttura dei sistemi di equazioni in esame, e si ha un passaggio ai già citati gruppi di permutazioni, alla teoria generale dei gruppi e infine alla cosiddetta teoria degli invarianti. Il determinante diventa infatti un "invariante", in quanto esso determina tutto il sistema di soluzioni di un gruppo di equazioni, e nello stesso tempo interi gruppi di sistemi di equazioni con determinanti ugualmente costruiti devono avere certe proprietà comuni. Del pari, le operazioni eseguite coi determinanti permettono di dedurre dai loro risultati le proprietà di sistemi combinati di equazioni, ai quali appartiene una certa proprietà prestabilita.

In ogni caso con queste acquisizioni l'algoritmo e la notazione hanno raggiunto una generalizzazione difficilmente superabile. Nella scrittura di Kronecker un determinante di ordine n viene indicato semplicemente con a_{ik}, dove i e k vanno da 1, 2, 3... ad n. Un sistema di n equazioni con n incognite si scrive oggi semplicemente $\sum_k a_{ik} x_k = c_i$ (dove $i, k = 1, 2, 3 \ldots n$). La cosa straordinaria non è naturalmente

che si scriva così, benché lo studio di opere che si servono di una tale stenografia richieda già un occhio e un orecchio matematici straordinariamente acuti. La vera meraviglia sta nel fatto che con simili macchine mentali, ognuna delle quali racchiude tutt'un mondo matematico, si eseguano tranquillamente calcoli d'ogni genere, come se si trattasse di semplici numeri. Chi conosce a fondo il calcolo, manovra con tutte le concepibili equazioni e gruppi di equazioni di un determinato sistema di coordinate con la stessa comodità e sicurezza come con un qualsiasi altro algoritmo. È perfino in grado di prevedere come si comporterà un certo gruppo di sistemi di equazioni in un altro sistema di coordinate, e sa quali proprietà subiranno modifiche con questa trasformazione, e quali rimarranno valide. Queste previsioni, si potrebbe quasi dire profezie, possono essere di fondamentale importanza non solo per la fisica ma per tutta la matematica, poiché esse collegano o distinguono tra di loro interi sistemi di equazioni costituenti mondi diversi. In breve, con la teoria dei gruppi e con quella dei determinanti, a cui si è aggiunta d'improvviso anche la geometria proiettiva (sorta in origine come opposizione all'algebrizzazione per diventare poi algebra essa stessa) si è sviluppata una teoria delle forme quanto mai generale, nella quale l'astrazione non ha quasi limite. Ci si è in qualche modo avvicinati alla realizzazione dell'idea principe di Leibniz di una cabala superiore, di un calcolo estremamente generale.

A tutto questo si accompagna un'altra disciplina, anch'essa in qualche modo una "supermatematica": la teoria degli aggregati. Di tutti gli argomenti di questo capitolo esso è forse quello che può venire esposto piú chiaramente, benché le difficoltà per la costruzione di una teoria siffatta siano quasi insormontabili.

Per poterci orientare esattamente, dobbiamo fare

l'uso piú estensivo del nostro tappeto magico sia nello spazio che nel tempo, poiché la teoria degli aggregati poggia su quasi tutti gli argomenti della matematica. "Aggregato" è una categoria mentale come numero, quantità, grandezza, grado o gruppo. Ecco fin dall'inizio la definizione classica di Georg Cantor, il principale fondatore della teoria degli aggregati: "Un aggregato è la riunione in un tutto unico di oggetti distinti della nostra intuizione e del nostro pensiero (che vengono chiamati gli elementi dell'aggregato)".

Una compagnia di soldati è un aggregato di soldati, i quali, quando sono equipaggiati a dovere, posseggono un aggregato "equivalente" di fucili, di paia di stivali, di elmetti; e un aggregato maggiore di cartucce. Ogni cartuccia contiene un aggregato di grani di polvere, il quale a sua volta è piú grande del numero delle cartucce. Tutti questi sono aggregati "finiti", perciò evidentemente "numerabili". Ogni parte di un aggregato cosiffatto è minore di tutto l'aggregato, e qui valgono inoltre i concetti della parte e del tutto, del maggiore e del minore.

Ora, però, come già ci è ben noto, nella matematica si urta sempre in pluralità o aggregati che hanno tutte le proprietà fuorché quella di esser finite. Ciò non significa che non si possono contare. Infatti la "numerabilità" non è una caratteristica legata concettualmente a un termine. Per ogni n nella successione dei numeri naturali, si può sempre pensare $(n+1)$ e per questo $(n+1)=m$ ancora $(m+1)$ e cosí via. Con questa possibilità di procedere innanzi quanto si vuole (infinità potenziale) abbiamo già fatto conoscenza in numerose occasioni. La possiamo considerare in modo puramente logico come conseguenza della legge di formazione dei numeri. Possiamo anche, psicologicamente e trascendentalmente nel senso di Kant, vedere l'origine di questa infinità potenziale nella semplice concezione dello spazio e del tempo. Sappiamo

che già Zenone urtò in parecchi paradossi, derivanti da questa infinità. Ogni numero che si presenti sotto forma di serie, per esempio un numero irrazionale, un numero convergente in base a una dimostrazione "per esaustione", oppure la costruzione di un continuo, offrono lo stesso enigma. Ora questo enigma aumenta sotto nuovi aspetti sia nella convergenza che nel continuo. Vediamo infatti dinanzi a noi in questi due casi il risultato concreto di una costruzione fatta con un numero infinito di parti, e otteniamo nella somma della serie o nella figura geometrica l'infinito "attuale" o completo o conchiuso, in breve un aggregato effettivamente infinito. Dobbiamo dire che gli attacchi a questa forma di rappresentazione, come l'abbiamo or ora esposta, non potranno mai mancare. Si potrà obiettare che una "parte" può essere infinitamente piccola solo quando la somma di un numero infinito di queste parti rimane sempre inferiore all'unità, dà cioè come risultato meno della piú piccola unità reale che si possa concepire. Anche riconoscendo questo punto di vista come relativamente giustificato, replichiamo ai logici troppo rigorosi che in questo modo si cade necessariamente in un groviglio di infinità diverse, nel quale si finisce per soffocare o quanto meno ogni conoscenza diventa sterile. Nelle questioni riguardanti l'infinito la ragione umana assume un punto di vista assai diverso dall'intuizione. La ragione dovrebbe respingere in generale ogni considerazione infinitesimale superiore e non dovrebbe neanche cercare di sottrarsi al nodo scorsoio della logica mediante il postulato del "concetto di limite", o del "passaggio al limite". Per la ragione non vi è nulla di piú ingrato dell'affermazione di Leibniz che in una serie convergente come $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ non può mai presentarsi un termine infinitamente piccolo. Ciascun ter-

mine deve rimanere finito, per minuscolo che sia. Perciò la serie convergente dovrebbe essere — grossolana *contradictio in adiecto* — divergente, poiché grandezze finite, sommate una all'altra un numero infinito di volte, dànno evidentemente una grandezza infinita. Avviene però altrettanto "ovviamente" l'opposto, e in ciò aiuta piú l'intuizione che la logica, poiché la logica, malgrado tutte le sue dimostrazioni apagogiche, lascia pur sempre una qualche incertezza.

Sappiamo che già la scolastica, principalmente Bradvardino, Tommaso d'Aquino e Cusano, penetrò profondamente in queste antinomie, le quali, malgrado tutte le affermazioni delle piú moderne ricerche sui fondamenti scientifici della logica, della logistica e della filosofia vaihingeriana, per l'osservatore non dogmatico e spassionato costituiscono come prima il "*credo quia absurdum*" della matematica; e — aggiungiamo noi — cosí dev'essere, in quanto solo da questo punto di vista metalogico si schiudono alla conoscenza nuovi orizzonti.

Proprio la logica orgogliosa e rigida della teoria degli aggregati e di quella dei gruppi appartengono — non si spaventi il lettore — a questo campo metalogico. In unione alla fisica moderna, queste teorie hanno fatto diventare la logica un letto di Procuste. In breve, la logica vien salvata in occasione di qualche nuova scoperta metalogica o antilogica, "stiracchiandola" senza troppi riguardi e annunziando trionfalmente che le nuove teorie vanno benissimo d'accordo con essa. Con ciò, e di questo parleremo a fondo nell'ultimo capitolo, il secolo decimonono è diventato "il secolo del metro estensibile". Che senso logico può avere, per ritornare alla teoria degli aggregati, l'affermazione apodittica che la parte in determinate circostanze dev'essere uguale al tutto? E che la somma di un numero infinito di queste parti non può essere maggiore del tutto? Per quello che comunemente si

chiama logica ciò non ha alcun senso, anzi è un errore e una contraddizione (*). Simili possibilità tolgono subito ogni certezza a tutta la matematica elementare, intesa come suscettibile di ordinamento "logico". Qui viene però in aiuto l'artificio: si estende semplicemente la logica, si delimita rigorosamente il campo in cui queste "false leggi" sono valide, e mediante un'inaudita estensione del metro di misura si considerano, generalizzando, le leggi delle quantità finite come casi particolari accessori del cosmo assai piú esteso dell'infinito attuale, il che è concepibile senza contraddizione dall'inizio del secolo decimonono, dal Bolzano in poi. Nel paragrafo 14 dei suoi *Paradossi*, il Bolzano afferma che nessuno, il quale si figuri la popolazione di Praga o di Pechino, pensa per questo a ogni singolo abitante; tanto meno, aggiungiamo noi, si deve correre col pensiero a ogni singolo punto di ogni "complesso di punti" (aggregato di punti).

Per noi la frase del Bolzano è proprio la dimostrazione che tutte queste cose sono da considerare come "metalogica": l'eterno paragonare, il continuo estrapolare dal finito all'infinito, l'intenzionale indeterminatezza del singolo, dell'elemento costitutivo, non possono essere contraddetti mediante ingegnosi sofismi. Lo stesso Georg Cantor, che in principio s'interessava poco di filosofia, ma a questo pose riparo piú tardi con leale interesse e frequentando religiosi forniti di cultura scolastica, per cui s'imbatté in Tommaso d'Aquino e nel suo "infinito attuale", intese certamente la sua teoria in maniera puramente logica. Lungi da noi il pensiero di porre in dubbio la genialità della teoria degli aggregati o di menomare i grandi meriti

(*) Nel caso degli aggregati infiniti si dice "equivalenza" e "potenza" diversa, per girare i concetti di uguaglianza e di maggiore e minore; questi sono però, se vogliamo, tentativi di *alibi* rispetto all'accennato "stiracchiamento" della logica.

di Cantor. Pensiamo solo, dal punto di vista esclusivamente storico, che anche in questo campo stia verificandosi un orientamento spirituale che prima o poi diventerà decisivo per l'ulteriore sviluppo della matematica. È la logica che viene ad essere assorbita dalla matematica, o la matematica dalla logica? Qui sta il nocciolo della questione, e qui appare anche il contrasto tra mentalità euclidea e mentalità magica o faustiana, a seconda di come si consideri questo problema, o meglio questo gruppo di problemi.

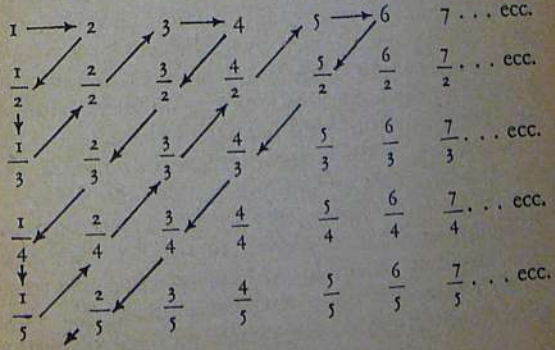
Ma anche su tali sconvolgimenti, nei quali ci troviamo oggi impigliati, possiamo appena dare qualche accenno, per non allontanarci dal nostro programma. Per concretare: un aggregato *M*, che abbiamo già definito, può essere finito come l'aggregato dei fiammiferi in una scatola o l'aggregato di tutti i numeri pari fino a 10.000, oppure l'aggregato dei numeri primi da 1 a 79. Tali aggregati finiti sono sempre "numerabili". Vi sono però anche degli aggregati infiniti numerabili, e sono proprio quelli per i quali la teoria è stata creata. L'aggregato di tutti i numeri naturali è numerabile. Questo non significa naturalmente che uno riesca a contarli, ma solo che, in linea di principio, si possono contare. Questa possibilità teorica è così manifesta, che perfino la mia bimbetta di cinque anni ha detto una volta: "Solo il buon Dio può contare fino alla fine, perché vive sempre". Si possono però contare anche tutti gli altri aggregati infiniti, nei quali sia possibile far corrispondere univocamente ad ogni elemento un numero naturale. Per esempio tutti i numeri pari, tutti i numeri primi, tutti i numeri divisibili per 2, per 5, per 13, per 79. Ognuno di questi altri aggregati è chiaramente un aggregato parziale dell'aggregato di tutti i numeri naturali, al quale può essere associato un cosiddetto "numero cardinale transfinito". Si verifica ora il terribile fenomeno che tutti gli aggregati parziali, per esprimerci grosso modo,

sono grandi quanto l'aggregato della totalità dei numeri naturali. Lo schema seguente mostra chiaramente questa enormità:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 . . . . . ∞
2, 4, 6, 8, 10 12, 14, 16 . . . . . ∞
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 . . . . . ∞
3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 . . . . . ∞
13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104 . . . . . ∞

Cantor, per esprimere questo fatto che "maggiore" e "minore", "parte" e "tutto" non hanno piú significato, introdusse il termine "potenza di un aggregato", e creò i gruppi di potenza diversa, i quali, come numeri cardinali transfiniti, vengono distinti l'uno dall'altro mediante indici. Questo nuovo numero si chiama $\aleph$ (alef) e prende un indice, come $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_\infty$. Gli esempi di cui sopra appartengono tutti al tipo $\aleph_0$.

Ora si è ritenuto per molto tempo che l'aggregato di tutti i numeri razionali non fosse numerabile, non appartenesse cioè al tipo $\aleph_0$. Cantor dimostrò però che questa credenza non corrispondeva alla realtà delle cose. Se infatti si immaginano tutti i numeri razionali scritti nella forma seguente:



è chiaro che, seguendo le frecce, è possibile contare in modo da non trascurare alcuno dei numeri razionali concepibili, poiché anzi nello schema parecchi numeri razionali sono indicati ripetutamente, come $1, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}$, ecc. e $\frac{5}{6}, \frac{10}{12}, \frac{15}{18}, \frac{20}{24}$ ecc. Cosí è anche numerabile, per esempio, l'aggregato di tutti i numeri algebrici:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = 0$$

come si può facilmente dimostrare.

La vera croce della teoria degli aggregati fino ad oggi è l'aggregato dei numeri costituenti il continuo. L'aggregato di tutti i numeri irrazionali che devono aggiungersi ai razionali per riempire effettivamente il continuo, o meglio per creare la continuità, non è per certo numerabile. L'aggregato di tutti i numeri reali non appartiene dunque al tipo $\aleph_0$. A quale tipo appartiene dunque? Questo non è ancora chiarito, e molti studiosi moderni sono propensi a lasciar cadere in generale il concetto di "potenza".

Senza perderci in troppe minuzie, vogliamo ancora citare qualche paradosso derivante dalla teoria degli aggregati. Le contraddizioni piú note si hanno nei concetti di "aggregati di tutti i numeri cardinali" e "aggregato di tutti i numeri ordinali" (antinomia di Burali-Forti). Infatti, per ogni numero cardinale ce ne dev'essere un altro maggiore, perciò questi due aggregati sono impossibili e privi di senso. Altro risultato paradossale sarebbe, secondo Zermelo e Russell, l'"aggregato di tutti gli aggregati che non sono contenuti l'uno nell'altro a guisa di elementi". Anche l'"aggregato di tutti gli aggregati" è impossibile e paradossale.

Di recente Hausdorff e altri hanno scoperto tutta una serie di altri paradossi della teoria degli aggregati,

specialmente nella geometria, i quali conducono spesso a risultati fantastici. Così è possibile dimostrare che il sole si può scomporre e ricomporre nella grandezza di una mela, senza togliere, aggiungere o comprimere nulla.

Il concetto di "pluralità" geometriche, come anche lo stesso Cantor chiamò in origine gli aggregati, nella matematica ha una parte di primaria importanza, dopo le ricerche di Grassmann e Riemann. Si tratta del concetto fondamentale di costituzione dello spazio esteso. Si credeva, e il senso comune lo ritiene ovvio, che l'insieme dei punti di una linea si trovasse, rispetto a quello dei punti del piano e dello spazio, nello stesso rapporto come ∞^1 a ∞^2 e ∞^3. Le "potenze" di questi aggregati dovevano perciò essere diverse come infinità di ordine diverso. La teoria degli aggregati nega questa differenza, e riconosce solo un aggregato unico di punti per tutte le dimensioni, che è sempre dello stesso grado della "potenza". Assai ingrata è anche l'antinomia seguente. Supponiamo, in un normale sistema di coordinate cartesiane, di aver scelto l'unità sull'asse x per esempio uguale a un micron e sull'asse y uguale a un miliardo di anni luce. Il numero di punti nella direzione x dev'essere "naturalmente" uguale a quello che c'è nella direzione y, altrimenti non sarebbe possibile alcuna coordinazione univoca o formazione di coppie di numeri. Come appaiono ora questi punti? Può forse la mente concepirli come punti? Si dovranno avere anche figure considerevolmente estese, e precisamente allungate nel senso delle y. Si tratta, è vero, di quantità infinite, e davanti all'infinito scompaiono differenze così insignificanti come quella tra un micron e un miliardo di anni luce. Ma allora? Non vi è nessun "ma". Se noi infatti cambiamo improvvisamente la scala delle coordinate non avviene nessun terribile capovolgimento; al contrario, dal punto di vista analitico e della teoria degli aggregati, non

avviene proprio nulla. Neanche la piú modesta trasformazione.

In breve, dal punto di vista faustiano, siamo un'altra volta di fronte alla cabala affratellata con le volte gotiche a sesto acuto, che si perdono in una misteriosa oscurità. Ma il cultore della logica non si perde d'animo: calcola, distingue, dimostra, limita, e afferma con un sorriso di superiorità che siamo come bambini, a voler vedere sempre qualche cosa di "intuitivo" sotto tutte queste macchine create dal pensiero. Non si deve lasciare adito all'immaginazione, altrimenti si sconfina dalla matematica e si diventa addirittura infantili.

Con questa rigida e cristallina limitazione dell'elemento magico, la teoria degli aggregati è diventata algoritmo, e viene usata come fondazione della teoria dei numeri, delle funzioni e degli integrali. Con un colpo di bacchetta magica diventa una sovrastruttura della matematica, e perfino della logica, una superscienza, una categoria mentale generale, come la teoria dei gruppi.

L'intuizione non è però necessariamente propria dei soli bambini; nei suoi effetti piú eccelsi è anzi un aspetto della divinità. Si affaccia di nuovo l'oscura domanda se a noi, piccoli uomini, sia permesso impunemente di lasciare la nostra οἰκουμένη γῆ, la terra abitata, per entrare, oltre i confini a noi segnati, nel dominio del divino. Diciamo impunemente, perché è assai dubbio se nella nostra presunzione siamo giustificati, quando raddrizziamo la logica come ci fa comodo, o se abbiamo piuttosto l'obbligo di sdegnare il conforto della logica, dovunque si abbia la sensazione che ci siano delle questioni fondamentali assai piú gravi. La parola "sensazione" spaventerà o disgusterà i puritani della matematica. Sembrerà anche inopportuno tirare in ballo le categorie mentali goethiane dal momento che Goethe era incontestabilmente uno spirito tutt'altro che mate-

matico, anche se da piú parti si cerca di dimostrare le sue supposte attitudini in questo campo (*).

Questa limitazione non altera però minimamente la possibilità che la struttura mentale goethiana sia estensibile anche al campo della matematica. E non parliamo a vuoto: uomini come Poincaré, Boutroux, e alcuni eminenti matematici tedeschi come Bieberbach, tendono con le loro piú recenti indagini verso la stessa direzione. E non sempre ci si lascia ingannare dalla pretesa che lo "stiracchiamento della logica" offra una base pseudologica alla matematica. Si potrebbe affermare con altrettanto diritto che esista un particolare "mondo matematico", da scoprire piuttosto che da inventare (**). Scopertolo, si può coltivarlo, generalizzarlo e dargli una forma organica. Questo mondo è però cosí vasto, cosí pieno d'inaudite meraviglie, che uno storico coscienzioso non potrà figurarselo esaurito od esauribile. Tra le pietre lucide e lisce delle sontuose città matematiche spunterà sempre l'erba dell'eterno divenire, e le città cadranno in rovina, finché nuovi architetti non ne costruiranno delle altre in uno stile nuovo, non mai visto prima, nelle quali risuoneranno idiomi sconosciuti.

D'altra parte l'algoritmo e la generalizzazione, per parlare di nuovo in linguaggio puramente matematico, possono arrivare a comprendere complessi sempre piú vasti. *A qualsiasi "supernumero" rimane però sempre vincolato in qualche modo il numero che ci permette di farlo entrare nei calcoli.* E tanto l'algoritmo come la generalizzazione sono semplici strumenti d'indagine, anche se si comportano da indisciplinati apprendisti stregoni. Oggi non si crede piú cosí schiettamente come al tempo

(*) La nostra opinione su Goethe come matematico è confermata in modo decisivo dalla sua teoria dei colori, esempio tipico di fisica puramente qualitativa.

(**) Si confronti a questo proposito la chiara esposizione di Boutroux nel suo libro *L'idéal scientifique des mathématiciens.*

del grande Laplace all'onnipotenza dello sviluppo meccanico della matematica per mezzo dell'algoritmo. Le migliori menti matematiche sanno per propria e incontrovertibile esperienza che le nuove conoscenze non sono semplicemente "calcolate", ma sorgono all'improvviso, pari a melodie mai prima udite, da profondità che anche il loro creatore non potrà mai illuminare o scandagliare.

I puri tautologisti e panlogisti nel loro zelo puritano vorrebbero portare il mondo della matematica a irrigidirsi e a chiudersi in se stesso, e viceversa i profeti della decadenza, tipo Spengler, portano l'indagine matematica fino alla disperazione. Diciamo questo non in senso deprecativo, ma solo come constatazione. A queste due tendenze contrasta però non solo il sentimento religioso e faustiano, ma anche addirittura la legge biologica, cosicché anche in questo campo si potrebbe colpire il materialismo con le sue stesse armi. Per evitare equivoci, dobbiamo riconoscere che una trattazione puramente strumentale e panlogistica della matematica dev'essere, a nostro parere, riguardata come essenzialmente materialistica, poiché il pensiero strumentale potrebbe difficilmente applicarsi senza contraddizione a un altro tipo di concezione del mondo.

Poiché tuttavia — e questo suoni come nota conciliativa alla fine del presente capitolo — la penetrazione della logica nella matematica e della matematica nella logica ha contribuito potentemente ad approfondire la nostra scienza, è opportuno considerare non le deformità bensí i frutti di questo processo di sviluppo. Abbiamo ancora da percorrere alcune province del regno della matematica, nelle quali nel secolo decimonono si verificarono importanti rivolgimenti; ma fin da ora possiamo affermare che i signori della provincia intitolata all'algebra e alla generalizzazione hanno sapientemente ordinato la loro casa per il futuro: e che tutto è pronto per ricevere degnamente nuovi ospiti e messaggeri.

XV

GAUSS

Matematica ed esperienza

Abbiamo chiuso il nostro ultimo capitolo preannunciando che vi erano ancora da percorrere solo alcune province del regno della matematica. Questa promessa, o meglio questa limitazione, è esatta per quanto riguarda l'indole del nostro libro. Non così per Gauss, poiché questo eroe, al quale ci avviciniamo ora con venerazione, fu non solo il dominatore di una di queste province, ma l'incontrastato *princeps mathematicorum*, il sovrano dell'intero regno della matematica. Nessuna macchia, nessun'ombra offusca questa stella di primissima grandezza, questa figura che appartiene alle più alte cime del pensiero umano di tutte le nazioni e di tutti i tempi.

Come Kant era figlio di un povero sellaio, così Gauss passò i primi anni della sua vita nella modesta casa di un muratore. Anzi, non semplice muratore era il padre, ma anche "maestro delle acque", cioè un uomo che si occupava di fontane e acquedotti. Gauss nacque nel 1777 a Brunswick, dove suo padre risiedeva. Nei primissimi anni della sua vita, come racconta egli stesso, imparò prima a contare che a parlare. Poi cominciò a "mendicar lettere" dai familiari, e fu subito in grado di leggere e scrivere, senza che si sapesse come aveva fatto a imparare. A sette anni entrò in una scuola elementare, la Katherinen Volksschule, frequentata da un centinaio di condiscepoli, e non si distinse in modo particolare. Solo a nove anni un caso rivelò le sue doti. Il maestro Büttner aveva dato ai ragazzi il compito di sommare

tutti i numeri dall'1 al 60. Ogni scolaro, appena finito, doveva posare la sua lavagna su una grande tavola, una lavagna sull'altra, in modo che il maestro potesse controllare la rapidità e l'esattezza della soluzione. Pochi minuti dopo che il problema era stato enunciato, il piccolo Gauss salta su, corre al tavolo e dice nel suo dialetto: "*Ligget se*" ("*Hier liegt sie*", eccola qui). Il maestro, col suo frustino in mano, guarda il pallido ragazzetto con compassione. Bene, a suo piacere: la frusta gli farà passare il gusto di certi scherzi per l'avvenire. Quando, dopo lungo tempo, tutte le lavagne sono deposte sulla tavola, il maestro le guarda ad una ad una, e distribuisce lode e biasimo. Ha già quasi dimenticato la prima lavagna. Cosa? Come mai? Non vi sta forse scritto 1830? Come ha fatto il monello? Sapeva già a memoria la soluzione? Gauss dice però con tutta semplicità di aver scritto mentalmente uno sotto l'altro il numero piú alto e il numero piú basso, poi il successivo piú alto e il successivo piú basso, e cosí via, in questo modo:

1	2	3	4	5	30
60	59	58	57	56	31
61	61	61	61	61	61

Aveva poi addizionato a due a due i numeri suddetti e sommato i trenta risultati uguali, cioè moltiplicato 30 per 61. Tre volte 61 fa 183, moltiplicato per 10 fa 1830. È tanto difficile? Büttner lasciò cadere la frusta e fece una cosa che lo rende degno di un monumento. Procurò a Gauss da Amburgo un testo di matematica, e ben presto dichiarò spontaneamente che non aveva piú nulla da insegnargli. Ma né il politecnico né l'università di Gottinga potevano offrire nulla a quella grande mente che, come Galois, a soli 15 anni studiava già Newton, Eulero e Lagrange. Non ancora diciannovenne, egli scoprí le equazioni della divisione del cerchio,

sulle quali ritorneremo, e per questa scoperta provò, come disse più tardi, "una gioia moderata". Compreso di questa gioia singolarmente malinconica, regalò al suo migliore amico Wolfgang Bolyai la lavagnetta storica sulla quale aveva iniziato la sua carriera di matematico. Passò subito però ad altri argomenti. Già da studente compilò una delle opere più grandiose della storia della matematica, le *Disquisitiones arithmeticae*, apparse nel 1801, delle quali il vecchio Lagrange disse che con esse Gauss si era elevato al rango di matematico di prim'ordine. A 23 anni diventò membro dell'Accademia di Pietroburgo, e a 25 fece stupire il mondo con la determinazione dell'orbita di Cerere. Il pianetino Cerere, poco tempo dopo la sua scoperta, era infatti sparito alla vista degli astronomi, e non si sapeva come ritrovarlo. Il giovane principe dei matematici si mise allora a tavolino, riempì di calcoli alcuni fogli, e dichiarò di averne determinato l'orbita. Nel tal punto doveva aggirarsi: là fu ricercato e subito trovato. Gauss era diventato con ciò un prodigio di fama mondiale, e tutte le nazioni estere cominciarono a corteggiarlo. Per trattenerlo in patria, lo si nominò direttore dell'osservatorio astronomico di Gottinga, che era ancora da costruire, e qui egli lavorò fino alla morte, avvenuta nel 1855.

Valga questo breve schizzo per le vicende della sua vita. La mente di Gauss, come quella di Archimede, conteneva tre elementi costitutivi che determinarono a un tempo la sua singolarità. Gauss vedeva la matematica come una carta topografica, che bastava decifrare per collegar tra di loro le località più remote. Sapeva anche, da vero spirito prometeico, che la matematica non è fine a se stessa. Voleva non solo forgiare la spada, ma, come Sigfrido, colpire con essa cielo e terra. Diventò così un campione della matematica applicata, specialmente della geodesia, della fisica e dell'astronomia. In terzo luogo, e anche questo ci fa

ripensare ad Archimede, non aveva bisogno di alcun aiuto estraneo per calcolare le cose piú complicate e faticose. Calcolava con i numeri ordinari con la stessa diligenza come con gl'integrali, le variabili complesse e gli spazi curvi, oppure con le curve di probabilità e le congruenze. Misurò un enorme triangolo Brocken-Hohenhagen-Inselsberg per stabilire, tra l'altro con l'aiuto della teoria degli errori, se lo spazio in cui viviamo è piano o curvo. E il piú strano è questo, che tenne per sé le piú importanti scoperte fino alla morte, come abbiamo già visto parlando di Abel, e, al contrario di Newton, lasciò tranquillamente che altri le riscoprisse e pubblicasse, non lesinando anzi la sua lode. Essendogli stato chiesto perché non aveva fatto conoscere la geometria non euclidea, di cui era padrone, disse che aveva temuto "le grida dei beoti". Benché queste parole le abbia dette Gauss, osiamo dubitare della loro giustezza obiettiva. Un uomo come Gauss, davanti al quale per circa sessant'anni tutti i maggiori critici si sono quasi inginocchiati nella polvere pieni di venerazione e di meraviglia, senza invidia e solo in cerca del suo favore, non aveva da temere le grida dei beoti, la rivolta dei filistei. Temeva piuttosto, rivelando un segreto cosí nascosto, di cui era venuto in possesso per caso, di turbare l'armonia delle sfere o di porre in moto delle forze che l'uomo non era in grado di controllare. Noi consideriamo l' "enigma di Gauss" come un fatto di significato altamente religioso, che rivela timor di Dio e moralità nel migliore significato della parola, preoccupazione del bene universale al disopra di tutti i motivi personali. Gauss non era affatto un originale. Era soltanto imbevuto di spirito demonico, e sapeva troppo per voler mettere in moto delle cose per le quali i tempi non erano forse ancora maturi. Se altri trovava da solo i suoi segreti, questo era per lui il segno che il momento opportuno era venuto. E poiché lui solo sa

quanto tali conoscenze siano difficili ad ottenere, scrive a Wolfgang Bolyai, quando suo figlio Giovanni Bolyai scopre la geometria non euclidea e ottiene l'apparente priorità della scoperta: "Considero questo giovane geometra come un genio di prima grandezza". Per conto nostro aggiungiamo che consideriamo Gauss di tutto cuore e con profonda venerazione come un uomo di grande carattere, cosa che vale forse piú di un grande ingegno.

Nei nostri limiti non ci è purtroppo consentito di rendergli sufficiente onore. Ci conforta però il pensiero che Gauss, dal punto di vista puramente scientifico, vive ancora in mezzo a noi ed è accessibile in piú di un modo a chiunque s'interessi seriamente di matematica. Ci limiteremo perciò ad accennare a qualcuna delle sue scoperte piú importanti, riducendole al nostro livello e cercando di partire da argomenti già noti. In primo luogo, prenderemo in esame la prima fondamentale scoperta di Gauss, le cosiddette equazioni della divisione del cerchio. Premettiamo che Gauss è stato uno dei piú grandi teorici dell'aritmetica. Proprio di questo si occupò nelle famose *Disquisitiones arithmeticae* del 1801, che si potrebbero chiamare, traducendo liberamente, "ricerche nel campo dei numeri". Senza che Gauss lo sapesse, l'agrimensore Wessel era riuscito nel 1798 a rappresentare per la prima volta analiticamente i numeri immaginari, i quali fino allora, come già sappiamo, erano stati considerati come "impossibili" o quanto meno come un prodotto dell'immaginazione senza alcuna rispondenza nella realtà. Nominiamo Wessel, perché non deve essergli tolta la gloria di aver compiuto un'azione degna di un genio. Gauss fece quasi contemporaneamente l'identica scoperta di Wessel. Noi, che siamo abituati a trovare in ogni testo di scuola media una spiegazione breve e compendiosa di questa rappresentazione dei numeri immaginari e complessi, non riusciamo piú a metterci dal punto di vista

del giovane Gauss. Per tutto il secolo decimottavo i numeri immaginari avevano ispirato estrema diffidenza, dato che anche i grandi matematici nell'adoperarli incorrevano negli errori piú grossolani di calcolo, e perciò nessuno di essi osava piú mettere a repentaglio la propria fama per causa loro. Erano state fatte molte scoperte enigmatiche d'ogni genere. Cosí, per esempio, Moivre aveva già enunciato nel 1738 che l'*n*-sima potenza del numero complesso ($\cos \alpha + i \sin \alpha$) è uguale a $\cos n\alpha + i \sin n\alpha$. Eulero conosceva la relazione $i^i = \overline{e^2}^{\pi}$ e infine Bernoulli e D'Alembert trovarono che eseguendo operazioni algebriche qualsiasi su numeri complessi si doveva sempre ottenere un numero complesso; regola di cui, notiamo incidentalmente, la formula di Moivre era un esempio molto generale.

Comunque, il regno dei numeri immaginari e complessi rimaneva sempre un mistero, e le sue leggi sfuggivano in modo incomprensibile e incontrollabile di tra le mani all'indagatore troppo audace, come se avesse voluto afferrare e trattenere dei fantasmi. Vi era però un ramo della matematica dove non era possibile sfuggire a questo "regno delle ombre", e cioè la teoria delle equazioni. Se il "teorema fondamentale dell'algebra" (una equazione di grado *n* ha sempre *n* soluzioni) dev'essere valido, allora non si evita lo scoglio delle soluzioni complesse. Ciò naturalmente anche nel caso di un'equazione del tipo $x^n = 1$, o, il che è lo stesso, $x^n - 1 = 0$. In questa equazione vi sono al massimo due soluzioni reali, cioè $+1$ e -1 nel caso di *n* pari, mentre tutte le altre soluzioni devono essere complesse. Ora Gauss, come abbiamo detto, era riuscito a trovare una geniale rappresentazione geometrico-analitica dei numeri complessi, non piú sotto forma di segmenti, ma nel piano. Nella nostra figura vediamo davanti a noi (fig. 11) questo "piano complesso". Riportando su di esso tutte le soluzioni dell'equazione

$x^n - 1 = 0$, i punti che corrispondono a questi numeri si possono unire mediante rette costituenti un poligono regolare. Si può difficilmente descrivere l'effetto miracoloso di questa scoperta. Ci si renda ben conto di questo fatto. Un gruppo di numeri reali e complessi

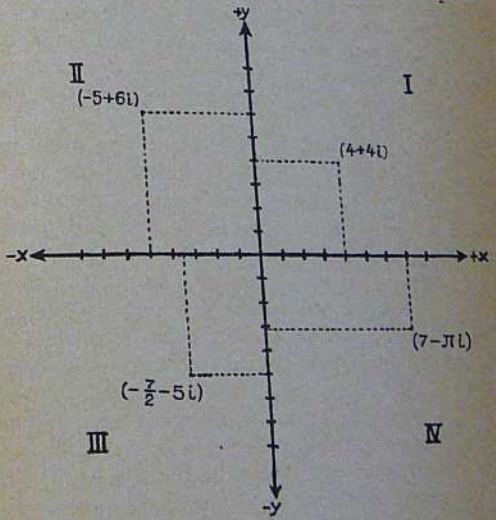


FIG. 11

costituenti tutte le soluzioni dell'equazione $x^n - 1 = 0$, quando è rappresentato nel piano secondo le regole della geometria analitica, ci dà un poligono regolare e divide perciò il cerchio circoscritto a questo poligono in n parti, ossia forma n angoli al centro. Aritmetica, algebra, geometria analitica, trigonometria e teoria delle funzioni fraternizzano in questo campo con la geometria elementare, e illuminano anche il campo delle costruzioni geometriche. Ora infatti si può indagare e prevedere quando un poligono regolare è costruibile

con riga e compasso. Con stupefazione generale anche dei piú grandi contemporanei, Gauss dimostrò che il poligono regolare di 17 lati è costruibile con riga e compasso; infatti quando n è un numero primo e della forma $2^k + 1$, dove k a sua volta dev'essere della forma 2^s, l'equazione $x^n - 1 = 0$ si può ricondurre a una espressione formata da radici quadrate, e questa è notoriamente la condizione perché una costruzione con riga e compasso sia possibile. Osservando questa regola per $s = 0$ si ha $n = 3$, per $s = 1$ $n = 5$, per $s = 2$ $n = 17$, e cosí via. In seguito, per altro, n non risulta sempre un numero primo.

Già con questo lavoro il diciannovenne Gauss si era dimostrato "maestro delle tre grandi A", come fu chiamato piú tardi: aritmetica, algebra e analisi.

Anche qui solo come accenno, diremo che Gauss pose a fianco delle equazioni un tipo di operazione algoritmica affatto nuovo, che si scrive $a \equiv b \pmod{n}$ e si legge "a congruente con b, secondo il modulo n". Alla base di questo concetto di "congruenza" sta l'idea di gruppo, poiché con un'operazione di questo genere un numero deve risultare non già uguale a un altro, ma, se ci è concessa questa espressione, di "struttura parallela" ad esso. Cosí, per esempio, 19 sarebbe congruente con 40 secondo il modulo 7, ovvero $19 \equiv 40 \pmod{7}$, perché tutti e due i numeri, divisi per 7, dànno il resto di 5, e perciò si comportano nello stesso modo rispetto al modulo comune 7.

In relazione con questa congruenza analizzeremo, come semplice esempio d'indagine nella teoria dei numeri, la cosiddetta prova del nove, che era già conosciuta nell'antica Grecia e nell'India ed ha affascinato tutti i matematici col suo mistero. Precisiamo che, rimanendo nel sistema decimale, esiste anche una prova dell'undici. In un sistema di cifre non decimali di base g vi è corrispondentemente una prova del $(g - 1)$ e una del $(g + 1)$.

Supponiamo dunque di avere un numero qualunque $z = a_m 10^m + ... + a_0 10^0$, che si può trasformare in

$$\underbrace{a_m 10^m + ... + a_1 10^1 - a_m - a_{m-1} - ... - a_1 + a_m + a_{m-1} + ... + a_0}_{\text{Resto}}$$

L'espressione sottolineata è anche uguale ad

$$a_m(10^m - 1) + a_{m-1}(10^{m-1} - 1) + ... + a_1(10^1 - 1) \quad \text{e}$$
$$(10^{m-\mu} - 1) = (10^1 - 1) \cdot (10^{m-\mu-1} + ... + 10^0)$$

dove μ rappresenta i numeri naturali da 0, 1, 2... fino a $(m-1)$. Dalle relazioni suddette si ricava che $a_m (10^m - 1) + ... + a_1 (10^1 - 1)$, cioè il valore della parte sottolineata del numero z, dev'essere un multiplo di $(10^1 - 1)$, cioè di 9. Allora $a_m + a_{m-1} + ... + a_0$ è il resto della divisione di z per 9. Questo $a_m + ... + a_0$ non è però altro che la somma delle cifre del numero z, poiché le a_μ non sono altro che i coefficienti delle potenze di 10, cioè proprio le cifre di cui si compone z. Chiamiamo ora la somma di queste cifre $S(z)$ e scriviamo $a_m + ... + a_0 \equiv S(z)$ oppure con Gauss $z \equiv S(z) \bmod 9$, dato che tanto il numero z completo quanto la somma delle sue cifre, divisi per $(10^1 - 1) = 9$, devono dare lo stesso resto $(a_m + ... + a_0)$. Otteniamo infatti un resto anche quando diciamo $8 : 9 = 0$ con l'avanzo di 8. Da tutto ciò risulta che $z \equiv S(z) \bmod (g - 1)$, quando g è il numero fondamentale; avremmo potuto infatti eseguire la nostra dimostrazione con le potenze di g, anziché di 10, cioè indipendentemente dalla grandezza concreta del numero base del sistema.

Poiché inoltre la somma delle cifre di una somma di cifre è essa pure congruente con la somma delle cifre originarie, secondo la proprietà transitiva anche il numero originario è congruente a questa somma. Da questa transitività della congruenza si ricava lo schema seguente della prova del nove:

Addizione: $a + b = c$
Sottrazione: $a - b = c$

$$\frac{S(a) \equiv a \quad S(b) \equiv b}{S(a) \pm S(b) \equiv [a \pm b = c] \equiv S(c)}$$

Moltiplicazione: $a \,.\, b = c$

$$\frac{S(a) \equiv a \quad S(b) \equiv b}{S(a) \,.\, S(b) \equiv [a \,.\, b = c] \equiv S(c)}$$

Divisione: $a = b \,.\, q + r$

$$q = \frac{a - r}{b} \; (r = \text{resto})$$

$$\frac{S(a) \equiv a \quad S(b) \equiv b \quad S(q) \equiv q \quad S(r) \equiv r}{S(q) - S(r) = a - r; \quad a - r = b \,.\, q; \quad S(a) - S(r) \equiv S(b)S(q);}$$

$$S(a) \equiv S(b)S(q) + S(r) \; (*)$$

Per maggiore chiarezza diamo di ciascun caso un esempio concreto:

Addizione: $a + b + c = d$ (SS significa la somma delle cifre del risultato della somma delle cifre).

$$\left.\begin{array}{l} a = 1638 \;\; S(a) = 18 \;\; SS(a) = 9 \\ b = 1224 \;\; S(b) = 9 \;\; SS(b) = 9 \\ c = \;\; 37 \;\; S(c) = 10 \;\; SS(c) = 1 \end{array}\right\} 19; \; 19 \equiv 10 \pmod 9$$

$$d = 2899 \;\; S(d) = 28 \;\; SS(d) = 10$$

Moltiplicazione: $a \,.\, b = c$

$$\left.\begin{array}{l} a = 1726 \;\; S(a) = 16 \;\; SS(a) = 7 \\ b = 321 \;\; S(b) = 6 \;\; SS(b) = 6 \end{array}\right\} 42; \; 42 \equiv 6 \pmod 9$$

$$c = 554.046 \; S(c) = 24 \; SS(c) = 6$$

(*) Per ognuna di queste congruenze bisogna sempre sottintendere mod (g—1), o mod 9 quando si ha specialmente di mira la prova del nove.

Divisione: $a:b = q$ con resto di r.

$$a = b \cdot q + r.$$

$$\begin{array}{l|l} a = 4647 \quad S(a) = 21 \quad SS(q) = 3 & \\ b = \ 215 \quad S(b) = 8 \quad SS(b) = 8 & 3 \equiv 8 \cdot \underbrace{3+6}_{30} \pmod 9 \\ \hline q = \ \ 21 \quad S(q) = 3 \quad SS(q) = 3 & \\ r = \ 132 \quad S(r) = 6 \quad SS(r) = 6 & \end{array}$$

Con l'esempio della prova del nove abbiamo cercato di far vedere un bagliore di tutte le magnifiche possibilità della teoria dei numeri. Possiamo arrischiarci ora ad accennare almeno alla famosa "legge di reciprocità quadratica" di Gauss, che rappresenta uno dei punti piú eminenti della sua produzione, ed è anch'essa contenuta nelle *Disquisitiones arithmeticae*. Questa legge riguarda i cosiddetti "resti quadratici", e dallo stesso Gauss venne indicata, per la sua enorme importanza, come "*theorema aureum*", e "*theorema fondamentale*". Nella scrittura di Legendre essa appare come

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-)1^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

dove $\left(\frac{q}{p}\right) = +1$ esprime il fatto che q può presentarsi come resto di un quadrato secondo il modulo p. Viceversa $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ significa che q non è il resto di un quadrato secondo il modulo p. Inoltre per la validità della legge di reciprocità si richiede che p e q siano diversi l'uno dall'altro e siano numeri primi. Osserviamo che per mod 3 si può immaginare solo 1 come resto quadratico, per mod 5 invece 1 e 4, per mod 7 i numeri 1, 2, 4, per mod 11 i numeri 1, 3, 4, 5, 9 e cosí via, poiché i resti quadratici formano un "periodo" nel quale compaiono sempre gli stessi resti ordinati in forma simmetrica. Cominciando con 0^2, questo periodo per mod 7 è: 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1, 0, e

per mod 11: 0, 1, 4, 5, 3, 3, 5, 9, 4, 1, 0. Così 5^2 secondo il modulo 7 avrebbe il resto quadratico 4, poiché 25 diviso per 7, dà come resto 4. E la condizione $c^2 = q \pmod{p}$ è soddisfatta quando, come abbiamo già detto, $\left(\frac{q}{p}\right) = +1$. Non vogliamo però trattenerci piú a lungo su questo argomento, e passiamo ad altro. Gauss, in un secondo capolavoro, l'*Algebra*, dimostrò piú volte in modi diversi il teorema fondamentale dell'algebra, di cui abbiamo già parlato. Un'altra delle sue grandi imprese fu la creazione della serie ipergeometrica, la cui importanza sta nel fatto che questa serie contiene numerose altre serie come casi speciali. Essa ha la legge di formazione:

$$F(\alpha, \beta, y; x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot y} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot y \cdot (y+1)} x^2 + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\,\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y \cdot (y+y)(1+2)} x^3 + \ldots$$

perciò in un caso concreto per $\alpha = 2$, $\beta = 5$ e $y = 3$, sarebbe

$$F(2, 5, 3; x) = 1 + \frac{10}{3} x + \frac{15}{2} x^2 + 14\, x^3 + \ldots$$

Ma anche qui non possiamo indugiare, perché sappiamo che il modo migliore di rendere omaggio alla memoria di Gauss è quello di rivolgerci al campo d'indagine che egli stesso tenne riservato fino alla morte. Sappiamo che oggi non si troverà piú alcun "beota", il quale levi le sue proteste quando si parla di geometria non euclidea. Oggi tuttavia esiste un'altra specie di beoti; e cioè quelli che, possedendo una cultura storica e matematica superficiale, credono che la fisica moderna abbia inventato tutte queste cose, a cominciare dalla relatività del moto, già conosciuta a sazietà

dal Newton, fino ai numeri immaginari, allo spazio curvo e alle geometrie pluridimensionali.

Abbiamo già accennato come Euclide abbia dato al postulato delle parallele un'espressione complicata, che si allontana sensibilmente dalla enunciazione degli altri assiomi. Questa anomalia doveva colpire lo sveglio senso matematico degli antichi elleni, ed effettivamente ha dato nell'occhio a piú di un matematico dell'antichità. Abbiamo anche fatto cenno della complicazione portata dalla scoperta degli asintoti. Perciò fino dai tempi piú remoti gli studiosi si sforzarono di mettere ordine in questo stato di cose, agendo in due direzioni. Si voleva da un lato ridurre a forma piú semplice il postulato delle parallele, per ragguagliarlo agli altri assiomi; dall'altro lato si cercava di dimostrarlo, cioè di spogliarlo del suo carattere assiomatico o postulatorio. A questo proposito occorre un breve chiarimento su quanto riguarda la terminologia. In Euclide si trova una separazione delle proposizioni fondamentali che riguardano le figure geometriche (postulati) dagli enunciati sui rapporti di grandezze (assiomi). Poiché dal punto di vista moderno questa distinzione non ha importanza, e dato che per noi un assioma è sempre un'affermazione che si può fare a meno di dimostrare, essendo proprio queste proposizioni fondamentali il punto di partenza di ogni dimostrazione, da ora in poi chiameremo assiomi tanto i postulati quanto gli assiomi in senso stretto, e parleremo perciò correntemente dell'assioma delle parallele. Si voleva dunque semplificare l'assioma delle parallele, ad esempio sotto la forma adottata da Proclo (410-485 d. C.): "Se a è una parallela a g passante per il punto P, non esiste alcun'altra parallela a g diversa da a, passante per questo stesso punto P". Oppure riportarlo ad altri assiomi e quindi farlo passare tra i teoremi derivati. In questo modo però accadeva inevitabilmente che la "dimostrazione" dell'assioma delle parallele introduceva di con-

trabbando un nuovo assioma, derivato dagli altri assiomi di Euclide, il quale si rivelava in definitiva "equivalente" all'assioma delle parallele. Cosí i geometri M. Pasch e Baldus, alla fine del secolo decimonono e all'inizio del ventesimo, dimostrarono che si può sostituire l'assioma delle parallele con altre proposizioni, ognuna delle quali, in connessione con gli altri assiomi di Euclide, è in grado di fornire una base di dimostrazione per l'assioma delle parallele; questo perciò diventa ufficialmente un teorema derivato. I nuovi assiomi sono per esempio: "La somma degli angoli di un triangolo è sempre uguale a due retti"; "esistono due triangoli simili e non congruenti"; "due punti equidistanti da una retta, e situati da uno stesso lato della retta, si trovano essi stessi su una retta", e cosí via.

Quanto poco chiaro fosse peraltro tutto ciò, e quale confusione regnasse in questo campo, si può arguire dal fatto che fino alla fine del secolo decimonono in parecchi testi di geometria c'era una "dimostrazione" dell'assioma delle parallele, che l'autore stesso ha avuto sott'occhio fin dall'infanzia. Naturalmente alla luce delle nuove indagini si è dimostrato che anche questa "dimostrazione" era viziata da difetti logici e da premesse sottintese, cosicché nel frattempo è stata eliminata dappertutto.

Sia detto incidentalmente che dotti d'ogni nazione si sono occupati dell'assioma delle parallele, e che sull'argomento esistono piú di 250 ragguardevoli lavori a noi noti. Da ultimo si era arrivati con rassegnazione a un punto morto, limitandosi a sconsigliare i malcontenti dall'intraprendere simili ricerche. È infatti accaduto piú di una volta che matematici di talento abbiano letteralmente sciupato l'acutezza del loro ingegno e il lavoro di tutta una vita sull'enigma delle parallele, chiudendo poi nella piú profonda disperazione questa vita cosí mal spesa. Tale fu per esempio il destino dell'amico di Gauss, Wolfgang Bolyai, reso piú tragico

dal fatto che il figlio Giovanni Bolyai fu uno dei primi a sciogliere l'enigma, senza che ciò fosse compreso o riconosciuto dal padre.

Ora però abbiamo l'obbligo di riprendere l'ordine cronologico e di riferire che il geniale gesuita padre Gerolamo Saccheri, professore di grammatica, di filosofia, di teologia polemica, di aritmetica, di algebra e di altro ancora, e insegnante da ultimo all'università di Pavia, compilò una memoria nella quale, all'ingrosso, assunse come ipotesi la non validità dei postulati delle parallele e cercò di portare questa ipotesi fino all'assurdo. Tale dimostrazione apagogica gli riuscì con relativa facilità nel caso dell' "ipotesi dell'angolo ottuso". Viceversa nel caso dell' "ipotesi dell'angolo acuto" si lasciò illudere da dimostrazioni apparentemente esatte, e conchiuse perciò erroneamente di aver purificato Euclide da ogni macchia. È per questo che la sua opera s'intitola *Euclides ab omni naevo vindicatus*. Vogliamo aggiungere qui che cosa s'intende con le ipotesi suddette. Se consideriamo un quadrato, sulla cui base AB si elevano perpendicolarmente i due lati AD e BC supposti uguali, di guisa che i due angoli alla base α e β siano congruenti e retti, si può dimostrare, indipendentemente dall'assioma delle parallele, che i due angoli rimanenti γ e δ sono eguali tra loro. Senza l'assioma delle parallele non è però dimostrabile che essi sono anche retti.

Da Saccheri in poi il problema non ebbe più requie, ma si sviluppò anzi in modo drammatico. J. H. Lambert (1728-1777) esaminò le due ipotesi e giunse abbastanza avanti, introducendo nella discussione anche il triangolo sferico (somma degli angoli maggiore di 180°) e rendendosi conto della equivalenza della somma degli angoli di un triangolo col postulato delle parallele. Arrivò perfino a parlare della "sfera immaginaria". E G. S. Klügel (1739-1812) come pure il gran-

de geometra Legendre (1752-1833), urtarono parimenti nel problema, accontentandosi per altro di dubitare dell'apriorità del postulato delle parallele, oppure cercando di provare la falsità delle "ipotesi" con argomenti illusori. Perciò la grande rivoluzione della geometria comincia effettivamente solo con Gauss, il quale si occupò del postulato delle parallele fino dal 1799, come risulta da una sua lettera a Wolfgang Bolyai. Questi per parte sua dedicò tutta la sua vita allo stesso argomento, per riconoscere infine la nullità dei suoi sforzi intesi a difendere Euclide. Cominciò allora uno dei periodi piú meravigliosi di scoperte contemporanee, che noi, per non fare confusione, riassumeremo schematicamente come segue:

a) Gauss stesso, come si è già detto, fu presto sulle tracce del mistero. Egli sviluppò per conto suo una geometria ineccepibile, nella quale non era valido il postulato delle parallele e la somma degli angoli del triangolo era minore di 180°.

b) Il giureconsulto Schweikart arrivò sostanzialmente alla stessa geometria e comunicò le sue idee a Gauss, ricevendone le lodi.

c) Il nipote di Schweikart, Taurinus, pubblicò per primo nel 1825 una discussione del nostro argomento, dimostrando sia l'ipotesi dell'angolo acuto che quella dell'angolo ottuso, e parlando anche della sfera immaginaria. Cadde però di nuovo nell'errore di Saccheri, e affermò infine la validità del postulato delle parallele nel senso di Euclide.

d) Il figlio di Wolfgang Bolyai, l'ufficiale del genio ungherese Giovanni Bolyai, costruí per primo nel 1823 una geometria "non euclidea" identica a quella di Gauss (secondo l'ipotesi dell'angolo acuto) e la pubblicò nel 1822.

e) Pure indipendentemente da tutti gli altri (*), il russo I. N. Lobacevskij (1793-1856) arrivò nel 1826 alla stessa geometria non euclidea e presentò la sua scoperta all'università di Kazan. La pubblicazione avvenne tra il 1829 e il 1840. Lobacevskij pose esplicitamente la sua geometria a fianco di quella euclidea, come altrettanto giustificata.

f) Bernhard Riemann, geniale allievo di Gauss e poi professore a Gottinga, preparò nel 1854 la vittoria finale. La sua tesi di docenza, *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria*, che fu esaminata dallo stesso Gauss, contiene già tutte e tre le geometrie con $\Sigma = 2R$, $\Sigma > 2R$ e $\Sigma < 2R$, dove Σ significa la somma degli angoli del triangolo.

g) La vittoria completa spetta a Beltrami e F. Klein, i quali, tra il 1868 e il 1871, dimostrarono la realtà dei punti anche della superficie a curvatura costante negativa, cioè la cosiddetta "sfera immaginaria", e in tal modo semplificarono e allargarono l'universo geometrico.

Non è nostro compito indagare i particolari di queste singole scoperte. Ci occuperemo piuttosto delle loro conseguenze dal punto di vista della critica scientifica. Vediamo che cosa era accaduto perché si cominciasse a intendere che il problema delle parallele era impenetrabile solo perché non doveva esser posto nella forma usata fino allora. Si seppe all'improvviso come siano concepibili e in un certo senso realizzabili delle geometrie nelle quali per un punto si possono tracciare due parallele a una retta o nessuna del tutto. Qui però il concetto di "retta" viene preso nel senso di Archimede e s'intende rappresenti "la piú breve di-

(*) Se si trascura il fatto che un allievo di Gauss fu collega di università del russo, e forse gli parlò degli studi di Gauss sul problema delle parallele.

stanza tra due punti". Se perciò nello spazio piano euclideo R_3 è contenuto uno "spazio curvo", come per esempio la superficie curva R_2 di una sfera, allora la "retta" dello spazio non euclideo è una curva. Il capitano di lungo corso che partendo da Plymouth deve dirigersi a New York, naviga in linea retta solo quando segue un meridiano, cioè una linea g non euclidea, come Mohrmann indica la retta piú generale concepibile. Siamo anche noi d'accordo che questi giuochi di prestigio con apparenti contraddizioni rendono le geometrie non euclidee fortemente sospette alla sana ragione umana. Ma, si può chiedere, quale filo conduttore segue questa ragione per conservarsi sana? Certo, le leggi della logica. Se perciò noi definiamo con Archimede come "retta" la piú breve congiungente tra due punti, senza richiedere necessariamente che questa congiungente si trovi in un R_2 cioè in un piano (incidentalmente bisognerebbe prima stabilire che R_2 è un piano), non ci rimane altro che accettare come "retta" quella figura che soddisfa a tale definizione. Se la parola "retta" disturba, si può dire "linea g", o "geodetica" o "la piú breve congiungente" o in un altro modo qualsiasi. La sostanza della questione non sta in questa apparente assurdità, ma in una simmetria assai piú sorprendente. Risulta infatti che tutti gli assiomi di Euclide, escluso quello delle parallele, valgono in modo ineccepibile anche nelle geometrie non euclidee, e che le costruzioni non basate sull'assioma delle parallele possono essere eseguite in qualsivoglia geometria. Perciò negli ultimi anni si è parlato piú di una volta di "geometria assoluta", intendendo l'insieme degli assiomi e delle proposizioni validi per tutte le geometrie, e cioè indipendenti dal tipo di geometria prescelto.

Nel nostro viaggio di esplorazione matematica attraverso il tempo e lo spazio siamo già diventati piuttosto insensibili alle generalizzazioni e alle antinomie d'ogni specie; però per quanto riguarda le geometrie non eu-

clidee, quelli che in genere perdonano le peggiori antinomie diventano impazienti o irascibili. Qui entra infatti in giuoco qualche cosa che è in contraddizione col senso comune, inteso non solo come ragione ma anche come intuizione. La nostra geometria, così si credeva fino a Kant e ancor oggi si crede in ambienti filosofici non sufficientemente orientati in fatto di matematica, è legata a priori allo spazio piano tridimensionale euclideo, è perciò data dalla natura stessa, e un'altra "realtà" non può essere che il sogno di menti fantastiche e malate o, nel migliore dei casi, la costruzione puramente razionalistica di panlogisti che si aggirano nel circolo vizioso della loro acrobazia concettuale ed estrapolano dal noto all'eternamente ignoto, dove possono valere leggi così diverse dalle nostre forme d'intuizione da far sì che il solo tentativo di superare le nostre possibilità diventi un vano giuoco metafisico.

A queste obiezioni sono state date le risposte più disparate, specialmente in rapporto alla fisica moderna. Alcuni, come per esempio Georg Simmel, spiegano che l'apriorità nel senso di Kant non viene toccata dall'estensione della geometria. Noi conserviamo difatti in pieno l'apriorità dell'assiomatica e della logica, anzi c'inchiniamo a questa "necessità" e a questo criterio di "validità generale" quando abbandoniamo la posizione oramai perduta dell'unilaterale postulato delle parallele, e liberiamo con ciò la geometria da una debolezza, se non proprio da un'intima contraddizione. Per quanto riguarda l'esperienza, noi possiamo in un R_2 praticare con la riga e col compasso tanto la geometria sferica non euclidea sulla superficie della sfera quanto la pseudosferica sulla pseudosfera, come se si trattasse di lavagne scolastiche rigorosamente euclidee nell'antico senso. Che in pratica R_3 debba esser euclideo, per permettere la nostra vita e la nostra conoscenza, è cosa assai dubbia. Per esempio oggi non consideriamo

piú la Terra come un disco piano, benché nella vita quotidiana ci si comporti come se cosí fosse. Forse anche il nostro senso dello spazio è un'illusione consimile. Che cosa cambierebbe per noi — ci domandiamo — se mediante misure piú raffinate si venisse a stabilire che la somma degli angoli di un triangolo è un poco maggiore o un poco minore di 180°? Proprio nulla. D'altra parte, nell'astronomia e nella fisica teorica si lavora già con delle geometrie non euclidee, mentre nella vita pratica la geometria euclidea conserva come prima la sua validità con sufficiente approssimazione. E se perdesse questa validità? Abbiamo già assistito a simili catastrofi del pensiero, e non abbiamo affatto perduto la salute nell'apprendere che la quadratura del circolo è ineseguibile. Per noi però l'effetto di un'eventuale curvatura dello spazio non può mai essere dello stesso ordine di grandezza della divergenza del numero π dal valore "esatto", e in piú la nuova fisica ammette che la completa validità della geometria euclidea in certi campi è assolutamente indiscutibile.

Comunque non abbiamo finora alcuna giustificazione sperimentale per abbandonare la geometria euclidea finché si tratta di campi limitati, pur essendo penetrati della necessità di ammettere una curvatura dello spazio, anche intesa come realtà fisica. Questo indipendentemente dal fatto che si hanno altre vie per evitare il dilemma. È sempre possibile infatti "immergere" col pensiero gli spazi curvi entro spazi "euclidei" a piú dimensioni, e adoperare la geometria euclidea in senso proiettivo. Da simili concetti deriva il punto di vista convenzionale adottato da Henri Poincaré, secondo il quale si sceglie la geometria da adottare non perché "vera", ma perché "comoda". Con ciò la questione della "verità" rimane senz'altro eliminata. Ci sembra tuttavia che lo stesso Poincaré non abbia spinto questo punto di vista fino alle estreme conseguenze, essendone impedito dal suo intuizionismo, che diffida in certo

modo della pura "esattezza" o inattaccabilità logica per sé stante.

Prima di chiudere l'argomento, aggiungiamo che secondo noi il capitolo delle geometrie non euclidee è lungi dall'essere chiuso, quand'anche esso costituisca un enorme passo avanti nella conquista dell'universo matematico. Avremo ancora delle sorprese, e ben presto. Infatti alcune province rivoluzionarie della matematica si sforzano di raggiungere una sintesi superiore, che cambierà la loro posizione altrettanto radicalmente quanto il calcolo infinitesimale ha variato il significato della tangente. Solo chi sia "alessandrino" nell'animo può credere che tutto sia stato oramai scoperto. Gli studiosi onesti ci mostrano in tutte le regioni della carta topografica gli spazi bianchi dell'inesplorato, e se pure non ci fossero questi spazi, è ben possibile che anche nei territori "pacificati" della matematica, in qualche valle abbandonata, rimangano delle ombre non ancora eliminate.

Per non suscitare speranze irrealizzabili, precisiamo di non voler significare con ciò la possibilità costruttiva della trisezione dell'angolo con riga e compasso oppure la razionalità della radice di due, risultati che non possono celarsi in nessuna nuova matematica concepibile, a meno di non gettare a mare qualsiasi logica.

Questo però vogliamo dichiarare esplicitamente: nella nostra qualità di osservatori storici, nulla ci farà aderire all'opinione corrente che la matematica sia arrivata alla fine delle sue risorse. È difficile vedere se si trovi in un vicolo cieco o sia piuttosto vero il contrario. Forse, mentre scriviamo queste righe, un giovane Galois o un altro Gauss sta elaborando a tavolino i geroglifici, per ora a lui solo comprensibili, di un nuovo calcolo, in confronto al quale tutti i rami della matematica finora conosciuti diventano nient'altro che casi particolari. Oppure un'altra scienza molto piú generale

— il sogno di Lullo, di Descartes, di Leibniz — accoglierà la matematica nel suo seno e le darà un nuovo significato. Fors'anche la matematica si rivelerà all'improvviso come "superscienza" e cederà a una cosiffatta "matematica universale" qualcuna delle sue forme concettuali piú elevate.

Gli indizi sono molti. I fatti seguiranno.

XVI

RIEMANN

La matematica intesa come mondo dello spirito

Uno dei sogni piú antichi e piú meravigliosi dell'umanità ci trasporta in un mondo dove tutto quello di cui sulla terra possiamo percepire solo un frammento o il lontano bagliore, esiste sotto una forma estremamente perfetta. Questa specie di mito ha avuto la sua piú nobile espressione nella dottrina platonica delle idee, da noi già illustrata come punto culminante della sapienza eleatica. Abbiamo anche accennato a suo tempo che nell'idea è personificato l'essere, l'eterna essenza, alla quale qualsiasi realtà soggetta alle leggi del divenire può bensí avvicinarsi gradualmente, senza però mai raggiungerla. Da questo punto di vista la dottrina delle idee contiene qualche cosa di dinamico e di prometeico, in quanto ogni nostra aspirazione, ogni desiderio di conoscenza, ci spingono verso l'idea, considerata sia come paradiso perduto che come mèta lontana e irraggiungibile.

Il secolo decimonono ebbe in sorte il compito di conquistare un regno che ricorda in certo modo quello delle idee di Platone, o per lo meno si avvicina allo stesso concetto dell'imperfezione terrena e della perfezione nell'al di là. Abbiamo già fatto cenno a questo mondo spirituale della matematica; ora però vogliamo ritornare sull'argomento e svilupparlo con una certa larghezza. Sarà anche una buona occasione per gettare un'occhiata sui magici retroscena di tutto ciò che noi chiamiamo matematica. In questo viaggio nel mondo dello spirito dimenticheremo che è possibile conside-

rare con tutta logicità e freddezza quello che a noi esploratori apparirà quasi un miracolo. Ma per poter fare questa esperienza occorre rifarsi piuttosto da lontano.

Sull'essenza, sulla potenza dell'algoritmo e della notazione, del simbolismo e del calcolo, non vi è bisogno di dire altro, dato che abbiamo già seguito e studiato questi strumenti della matematica nel loro divenire attraverso i secoli. Dobbiamo solo esaminare un po' piú da vicino un lato specifico dell'algoritmo, e illustrare meglio le basi delle operazioni e le proprietà dei vari tipi di numeri.

In occasione di tutte le ricerche fatte per generalizzare i vari algoritmi, si sono verificati fenomeni singolari e stridenti disarmonie. Se per esempio si volevano eseguire le operazioni aritmetiche nel campo dei numeri naturali, ci si trovava subito di fronte alla necessità di oltrepassare e abbandonare questo campo. Si riconobbe infine che occorreva aggiungere sempre nuovi tipi di numeri al tipo originario dei numeri naturali. Questa necessità si presentava fin dalla piú modesta generalizzazione, specialmente delle operazioni litiche. Quando togliamo b da a, essendo a e b due numeri naturali, basta che si verifichi la condizione $b > a$ per saltare oltre il regno dei numeri naturali. Dobbiamo considerare "falso" il risultato come si ritenne di dover fare fino a Descartes, oppure deciderci a introdurre un tipo piú generale di "numero intero", il quale comprenda tanto i numeri interi positivi (naturali) quanto i negativi. In altro modo agisce la divisione. Qui infatti volendo dividere un numero naturale per un altro maggiore di esso, nasce il concetto di frazione reale; questa, a sua volta, può essere tanto positiva che negativa, secondo che per la divisione si adoperano i soli numeri naturali oppure tutti i numeri interi. In questo modo abbiamo già ampliato il nostro regno dei numeri, che adesso è diventato il regno di tutti i numeri razionali, cosí chiamati perché limitandoci a

questo tipo è sempre possibile paragonare i singoli numeri tra di loro secondo un rapporto definito, cioè in altre parole la divisione si può portare a termine. Ma già l'operazione litica piú elevata, l'estrazione di radice, pone un nuovo problema e produce un nuovo tipo di numero, che ci porta assai lontano dal nostro campo laboriosamente delimitato dei numeri razionali. Con la pluralità delle radici entriamo nel campo dei numeri irrazionali, che non è possibile rappresentare esaurientemente in maniera statica. Per intendere i numeri irrazionali dobbiamo ricorrere a una "espressione dinamica", e nella migliore ipotesi scoprire mediante le serie una legge di formazione che ci permetta di spingere fin dove vogliamo l'approssimazione del numero irrazionale al "valore reale", oppure di ridurre l'errore, come suol dirsi, al disotto di un limite arbitrario. Nella pratica ci si serve continuamente di approssimazioni, e perciò questa differenza sostanziale spesso non viene neanche avvertita. Cosí interrompiamo a un certo punto i calcoli con frazioni decimali, siano esse razionali o irrazionali, senza preoccuparci della diversità concettuale dei due casi. Dal punto di vista teorico bisogna però dire che l'introduzione degli irrazionali nelle operazioni rappresenta una delle maggiori estensioni del regno dei numeri. Si può infatti dimostrare che tra due numeri razionali qualsiasi infinitamente vicini deve trovarsi una quantità infinita di numeri irrazionali, e cioè, nel senso della teoria degli aggregati, un aggregato non piú numerabile il cui numero cardinale transfinito è di un ordine fino a oggi non ancora studiato. Con questo ulteriore ampliamento del concetto di numero, con l'aggiunta dei numeri irrazionali, siamo arrivati al campo dei numeri reali, nel quale sono contenuti tutti i numeri naturali, tutti i numeri interi positivi e negativi, tutti i numeri frazionari positivi e negativi e tutti i numeri irrazionali positivi e negativi.

Ora l'algoritmo delle equazioni dimostrò ben presto che la estrazione di radice non sempre si può limitare ai soli numeri positivi. Si può anche osservare che problemi simili dovevano nascere anche da un'analisi puramente combinatoria sull'impiego di tutte le specie di operazioni su tutti i diversi tipi di numeri; in un'analisi cosiffatta si sarebbe dovuto necessariamente prendere in esame non solo le divisioni dei numeri negativi ma anche le loro radici. Nelle nostre considerazioni abbiamo però introdotto le equazioni per ragioni non di principio, ma storiche, dato che i numeri "impossibili" o "immaginari" comparvero per la prima volta nella risoluzione di equazioni mediante estrazioni di radice. Conosciamo già qualcosa su questi numeri immaginari e sul modo di adoperarli, e sappiamo che il teorema fondamentale dell'algebra si basa in sostanza sul fatto che una radice di ordine n dà n valori diversi, parte dei quali sono immaginari o complessi.

Come si è già accennato. D'Alembert, Eulero e altri scoprirono l'importantissima proprietà che le operazioni coi numeri complessi, cioè numeri del tipo $(a+bi)$, non oltrepassano mai il campo dei numeri complessi. Possiamo sommare, sottrarre, moltiplicare, dividere, elevare a potenza ed estrarre radici: otteniamo sempre come risultato al massimo un altro numero complesso. Poiché in seguito si riuscí ad eseguire coi numeri immaginari e complessi anche altre operazioni, per esempio logaritmiche e goniometriche, ritrovando sempre al massimo dei numeri complessi, si doveva concludere che i confini del regno dei numeri fossero stati raggiunti. A questo punto erano arrivati Gauss e Cauchy, come pure Grassmann e altri. S'imponeva però la domanda, se fosse obbligatorio rimanere nel piano complesso come lo aveva rappresentato Gauss, o se non fosse possibile concepire nello spazio numeri ipercomplessi del tipo $a + bi + cj$. Le ricerche condotte a questo proposito mostrarono ben presto che numeri iper-

complessi di tre termini erano difficili da maneggiare per la loro asimmetria, e non portavano nessun vantaggio. Perciò Sir William Rowan Hamilton, una delle menti più geniali e bizzarre del secondo decimonono, si decise a passare a un tipo di numero ipercomplesso ancora più elevato, ai cosiddetti "quaternioni" della forma $a + bi + cj + dk$, sui quali ritorneremo.

Nel frattempo, e anche in questo Gauss e Cauchy avevano precorso i tempi, si era arrivati a una situazione straordinariamente interessante dal lato storico e psicologico, alla quale abbiamo già accennato al principio di questo capitolo. Come conquistatori in territori lontani e appena espugnati cominciano improvvisamente a considerare la loro patria d'origine sotto un'altra luce e in confronto coi tesori del nuovo mondo vedono diversi oggetti del "vecchio mondo" come frammenti mutilati e incompleti di un mondo anteriore più ricco, così i conquistatori del regno dei numeri complessi si volsero indietro a considerare tutto ciò che si trovava al disotto di questo nuovo eldorado. Videro allora che effettivamente il regno dei numeri reali non era altro che un frammento rudimentale di un mondo primitivo più completo e armonioso, di un platonico regno delle idee esteso alla matematica. Quando, oltre a ciò, fu manifesto che dal comportamento dei "prototipi" si potevano trarre conclusioni sul comportamento dei numeri delle categorie subordinate e che si poteva perfino dimostrare con relativa facilità perché anche i grandi matematici avevano commesso errori sopra errori, allora fu aperta la via a nuovi importanti progressi, a un nuovo mondo delle forme, che apparve molteplice e decisivo al punto, che alla fine dell'ottocento un grande matematico arrivò a indicare senz'altro il suo secolo come il "secolo della teoria delle funzioni".

Ecco l'argomento, al quale abbiamo cercato finora di avvicinarci passo passo. Anche qui siamo costretti

a dare per via indiretta una visione approssimativa del campo certamente piú inaccessibile e impopolare della moderna matematica: la teoria delle "variabili complesse" o "teoria delle funzioni" nel senso ristretto della parola.

Sotto il nome di "teoria delle funzioni" si dovrebbe comprendere in generale gran parte della matematica. Che cosa c'è infatti che non si possa considerare come funzione? Già all'inizio dell'ottocento il concetto classico di funzione era stato abbandonato e ampliato in modo tale, che questa generalizzazione equivaleva quasi a una diversità. Dirichlet infatti trasformò questo concetto nel senso che sotto il nome di funzione di una variabile reale x nell'intervallo da a a b si deve intendere qualsiasi grandezza y, la quale, per ogni valore particolare assunto da x in questo intervallo, assume uno ed un solo valore, che può essere dato mediante il valore di x o trovato mediante il calcolo, la costruzione geometrica, l'osservazione e simili. Una teoria delle funzioni nel senso piú generale dovrebbe mettere ordine in questa infinita molteplicità di funzioni, classificarle, studiare le loro proprietà, verificare le operazioni di calcolo su ognuna, e cosí via. Ora però queste generalizzazioni del concetto di funzione hanno fatto sí che anche nella teoria delle funzioni in senso ristretto, cioè nella teoria delle variabili complesse, la definizione del concetto di funzione debba essere ampliata a un punto tale, che questa teoria, come dice Knopp nel suo manuale sulla *Teoria delle funzioni*, può difficilmente sottostare a leggi e teoremi generali. Knopp dice ancora: "Sarà nostro compito di limitare le premesse, in modo da scegliere nell'insieme di tutte le funzioni una classe speciale particolarmente preziosa per la sua applicabilità alle scienze naturali e matematiche. Le condizioni che porremo sono quelle della continuità e della derivabilità".

Abbiamo citato intenzionalmente queste frasi di un

libro recente, per mostrare che il punto di vista delle indagini riguardanti la teoria delle funzioni non è sostanzialmente mutato dalla sua scoperta in poi. La derivabilità e la continuità sono "preziose", perché solo funzioni con queste caratteristiche si prestano alla trattazione aritmetica effettiva mediante il calcolo infinitesimale. A questa conclusione si arriva, per quanto radicali e complicati siano i mezzi che vi portano, non appena si ha a che fare con funzioni di poco diverse dalle funzioni elementari. L'analisi infinitesimale è piena di trabocchetti e di precipizi. Ci si deve abituare passo passo a certe anomalie delle funzioni, e una conoscenza esauriente di una funzione è possibile generalmente solo quando si sia studiata nel suo aspetto complesso originario. A sostegno di questa affermazione si può dare con Wieleitner un semplice esempio riguardante la funzione esponenziale o logaritmica. Nel 1748 Eulero scoprí l'importante relazione $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Ora sin α diventa notoriamente zero per $\alpha = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \ldots \pm n\pi$, e cos α è uguale a 1 per multipli pari di π, dove π indica la misura di un arco di 180°, come si usa correntemente nell'analisi. Perciò si ha $e^{2ni\pi} = 1$, dato che per l'angolo $\alpha = 2n\pi$ il seno di α è zero e il coseno di α è 1. Se ora venisse data una potenza qualunque di e, per esempio e^m, al suo posto si potrà scrivere $e^{m+2i\pi}$, $e^{m+4i\pi}$ e in generale $e^{m+2ni\pi}$, perché con questo non si cambia nulla. Infatti $e^{m+2ni\pi} = e^m \cdot e^{2ni\pi}$ ed $e^{2ni\pi} = 1$, come abbiamo già visto. Dunque se noi interpretiamo la "potenza" come funzione esponenziale, consideriamo cioè l'esponente come variabile, la funzione esponenziale assume nel campo dei numeri complessi infiniti valori. Se ora poniamo l'equazione esponenziale $e^m = a$, oppure $a = e^m$, sotto forma logaritmica, in base a quanto è stato detto sopra, otteniamo non soltanto $\log_e a = m$, ma con lo stesso diritto $\log_e a = m + 2ni\pi$, dove n può essere un numero intero qualsiasi da 0 fino a $\pm\infty$. Perciò nel

regno delle idee esistono per ciascun numero *a* infiniti logaritmi, dei quali tuttavia uno solo è reale e a noi comuni mortali si presenta come "il" logaritmo.

Ma anche nella teoria delle serie incontriamo, passando nel campo complesso, simili estensioni. Le serie a noi familiari, come per esempio le progressioni geometriche decrescenti del tipo $1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}\ldots$ si muovono esclusivamente sulla linea dei numeri reali, e si devono riportare su di essa, quando si vogliano rappresentare geometricamente. Su questa linea tendono verso un limite, un punto di convergenza, che per esempio, nel caso $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$, è il punto 2. In modo sostanzialmente diverso si comportano le serie convergenti complesse. D'accordo con le particolari proprietà dei numeri complessi, tali serie si estendono su tutta una superficie e al punto di convergenza corrisponde un cerchio di convergenza. Parlando in linguaggio figurato, si potrebbe paragonare il piano dei numeri complessi a due strade che corrono su solidi argini e si tagliano in croce. Rimanendo nel regno dei numeri reali o dei puri immaginari tutte le operazioni si svolgono su queste solide strade; quando viceversa si ha a che fare con una mescolanza dei due tipi di numeri, cioè coi numeri complessi, si cade da tutte le parti nelle lussureggianti regioni del piano complesso, giacente tra una strada e l'altra.

Come abbiamo già detto ripetutamente, purtroppo ci è vietato di trattare qui una materia che richiederebbe un libro intero solo per spiegarne i capitoli piú importanti. Seguendo il nostro metodo, dobbiamo perciò limitarci ancora una volta a dare alcuni esempi accessibili, la cui molteplice trasformazione nei campi dove si trovano le maggiori difficoltà e complicazioni costi-

tuisce l'argomento del quale cerchiamo di parlare per via di accenni. Abbiamo già sentito che la continuità e la derivabilità sono proprietà caratteristiche e importantissime di una classe di funzioni. Soprattutto con questa classe abbiamo da fare nella vita pratica, intendendosi con essa la fisica, l'ingegneria, la geodesia, l'astronomia, la meteorologia e simili. All'inizio dell'analisi infinitesimale si consideravano queste due proprietà della continuità e della derivabilità come essenziali per il concetto di funzione, per lo meno si era convinti che non si trattasse di proprietà distinte. Se si sapeva che una funzione era continua, essa era anche differenziabile, e se era differenziabile era continua. Se era l'una o l'altra cosa, allora la curva rappresentativa della funzione doveva avere una tangente. Infatti il quoziente differenziale non è altro che l'espressione aritmetica del rapporto di certe proiezioni dipendenti dalla tangente. Tanto maggiore fu dunque la sorpresa quando Weierstrass pose termine per sempre a questa illusione. La teoria delle funzioni, fondata da Riemann e Weierstrass, non solo pose in luce tutte le questioni di cui abbiamo parlato finora, ma dimostrò ancora che la continuità e la derivabilità sono due proprietà indipendenti l'una dall'altra. Vi sono cioè funzioni continue che non hanno alcuna derivata, dunque nessuna tangente (*), cosa che dal punto di vista geometrico è difficilmente concepibile. Si sa inoltre oggi che le funzioni continue e differenziabili sono appena una minuscola isola, nel vasto oceano delle funzioni non dotate di tali proprietà. Tuttavia dobbiamo anche aggiungere che questo fatto, considerato logicamente, non risulta tanto dalla natura della definizione originaria di funzione quanto dalla sua estensione, e che qui ci troviamo di fronte a un sofisma, di cui però non si può far colpa alla matematica, dal momento che solo me-

(*) Come vedremo, vi sono perfino dei punti, nei quali esiste una derivata, ma non una tangente.

diante l'estensione del concetto di funzione è stato possibile delimitare e precisare il campo delle funzioni intese nel vecchio senso. In questo campo ristretto e, per così dire, classico delle funzioni emergono fenomeni e anormalità, le cui cause profonde possono venire studiate solo nel campo più esteso delle funzioni complesse.

Ma noi abbiamo promesso degli esempi, per cogliere almeno un bagliore delle profonde questioni trattate in questo capitolo. Supponiamo dunque di voler analizzare la funzione $y = x^{\frac{1}{3}}$. Dobbiamo subito riconoscere che essa ha un andamento continuo in tutto l'intervallo da $-\infty$ a $+\infty$. La derivata di questa funzione è $y' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$ per x maggiore o minore di o. Se $x = o$ otteniamo per la derivata il valore ∞. La nostra funzione ha quindi una derivata, la quale però in un certo punto non è rappresentata da alcun valore finito. La cosa diventa già più complicata nella cosiddetta parabola di Neil $y = x^{\frac{2}{3}}$, anch'essa con andamento continuo tra $-\infty$ e $+\infty$. Questa curva ha infatti nel punto $x = o$ come derivata "anteriore" o "destra" $+\infty$ e come derivata "posteriore" o "sinistra" $-\infty$. Perciò in questo punto, malgrado la continuità, non esiste alcuna tangente. La stessa cosa sarebbe vera per l'equazione $y = |x|$ dove per il punto $|x| = o$ la derivata "anteriore" è $+ 1$, e la derivata "posteriore" $- 1$. Anche qui nessuna tangente, malgrado la continuità e la derivabilità. Esistono pure, come abbiamo già detto, funzioni continue non differenziabili, ma nei limiti impostici non possiamo addentrarci nel loro esame. Un breve esempio ancora, per chiudere queste considerazioni. Fino all'introduzione delle grandezze complesse, si credeva a buon diritto che la funzione $y = \frac{1}{1 + x^2}$

fosse continua da $+\infty$ a $-\infty$. Considerandola piú da vicino, si vide che per $x = \pm i$ essa presenta due punti di discontinuità, nei quali il valore della funzione diventa improvvisamente finito. Infatti $\frac{1}{1+i^2} = \frac{1}{1+(\sqrt{-1})^2} = \frac{1}{1-1} = \infty$, e lo stesso avviene per $x = (-i)$.

È chiaro che tutte queste indagini ed altre analoghe di maggiore portata hanno un'enorme importanza per la teoria degli integrali, e poi in un campo, che è quello in cui principalmente si applica il calcolo integrale, cioè nelle equazioni differenziali. Un'equazione differenziale è un'equazione in cui appaiono non solo le variabili, per esempio x e y, ma i differenziali delle variabili come dx e dy, sia da soli, sia insieme alle variabili stesse. Equazioni cosiffatte appaiono in tutti i campi della fisica teorica, come risultato di precedenti derivazioni o come dato di partenza. Servono nel modo piú ampio a descrivere i fenomeni naturali, mettendoci in grado di fissarne gli stati caratteristici. La risoluzione avviene in definitiva integrando i due membri dell'equazione, che viene ricondotta cosí a una formale funzione di piú variabili e caratterizza l'andamento concreto del fenomeno.

In questi problemi, ai quali si aggiunge ancora la complicazione dei differenziali parziali, da chi sono sostenute le parti principali? Precisamente dalla funzione, dalla differenziazione e dall'integrazione. E come si riesce ad orientarsi? Mediante la conoscenza approfondita di tutte le possibilità contenute nelle funzioni.

Oramai il lettore vedrà abbastanza chiaro qual è lo scopo che la teoria delle funzioni si propone, e si sarà convinto che si tratta di questioni ben reali e non di acrobazie mentali. Non chiuderemo però questo capitolo senza aprire le porte a una visione ancor piú gran-

diosa, a un regno le cui colonie sono oggi quasi tutti i rami della fisica dinamica. Cominciamo con qualche notizia biografica, parlando di Sir William Rowan Hamilton. L'abbiamo già chiamato un genio bizzarro. Ma era qualcosa di piú: un "puro folle" della nostra scienza, o meglio della nostra arte. Hamilton nacque a Dublino nel 1805. A dieci anni sapeva già a memoria tutto Omero, e cominciò a studiare l'arabo e il sanscrito. Pochi anni piú tardi era padrone di tredici lingue. Fu anche poeta ed amico di Wordsworth. A ventitré anni ebbe, col titolo di "astronomo reale d'Irlanda", l'onorevole carica di direttore dell'Osservatorio astronomico di Dunsink presso Dublino, che tenne fino alla morte (1865). Durante la sua vita fu sempre fedele alle Muse e purtroppo anche a Bacco. Si racconta perfino che di notte doveva essere legato al telescopio dell'Osservatorio per non cadere. Le molteplici ebbrezze della poesia, della matematica superiore, della filosofia e dell'alcool finirono per offuscargli il cervello, sicché negli ultimi anni diventò d'umore strambo, se non proprio un anormale di mente. Comunque sia, non intendiamo cavillare con un ingegno di questa grandezza, ma solo far conoscere il suo modo dionisiaco di vivere e di lavorare. La sua volontà infatti fu piú potente delle sue imprese, e per questo egli divenne uno dei profeti del regno spirituale della matematica.

La prima opera di Hamilton sulle "funzioni coniugate" apparve nel 1835. In questo lavoro egli cercò di seguire le tracce della filosofia di Kant e di fondare il concetto di numero sulla forma d'intuizione del tempo, esprimendosi in frasi come questa: "Il concetto quantitativo di spazio compare nel mondo della rappresentazione solo mediante la formazione di differenze, e con questo viene resa possibile l'operazione del misurare". Nella sua trattazione egli considera i numeri complessi ordinari come coppie di numeri, interpretazione che da

allora non è piú scomparsa ed ha facilitato notevolmente tutta l'esposizione analitica dei complessi.

Per poter dire almeno qualche cosa sui "quaternioni", diventati di dominio generale con le pubblicazioni di Hamilton del 1853 (*Nozioni sui quaternioni*) e del 1866 (*Elementi dei quaternioni*), dobbiamo passare alla fisica. Nel capitolo su Leibniz abbiamo detto a suo tempo che Varignon introdusse il parallelogramma delle forze, mediante il quale è possibile determinare la risultante di due forze, e viceversa scomporre una forza nelle sue componenti. Se ora si rappresentano i numeri complessi non piú nel modo solito, ma in coordinate polari, si ottiene per ogni numero complesso un cosiddetto "vettore", cioè un segmento orientato, dalla cui lunghezza, verso e angolo d'inclinazione rispetto all'asse delle ascisse si possono ricavare tutte le caratteristiche del numero complesso in questione. Facendo la somma di tali vettori, si ottiene una figura che corrisponde esattamente al parallelogramma delle forze. Le operazioni coi numeri complessi dànno perciò come un'immagine di processi dinamici, e il risultato dei calcoli è, sotto certe ipotesi, identico a quello di ricerche e trasformazioni meccaniche. In linguaggio matematico, mediante l'addizione $(x + iy) + (a + ib) = x + a + i(y + b)$ si verifica uno spostamento parallelo del piano, dato dal segmento $a + ib$. Una moltiplicazione $(x + iy) \cdot (a + ib) = (x + iy)\,\rho \cdot e^{i\varphi}$ provoca una rotazione del piano dell'angolo φ intorno al punto d'origine delle coordinate e contemporaneamente un ingrandimento di tutti i segmenti nel rapporto $1 : \rho$, cioè una trasformazione per similitudine e una rotazione.

Questa cosiddetta "analisi vettoriale" è diventata un grande campo di attività della matematica e della fisica, essendosi resa possibile con tale sistema l'interpretazione matematica della piú gran parte dei fenomeni naturali con sorprendente immediatezza. Hamilton in-

trodusse per la prima volta il concetto di vettore nel 1845 in un articolo sul "Quarterly Journal" e distinse poi le grandezze complesse in una parte "scalare", puramente numerica, e una parte vettoriale, dotata di direzione: distinzione di grande importanza in ogni calcolo vettoriale, dato che per la parte scalare valgono altre regole che per la parte vettoriale.

Ora i famosi quaternioni non sono altro che nu-

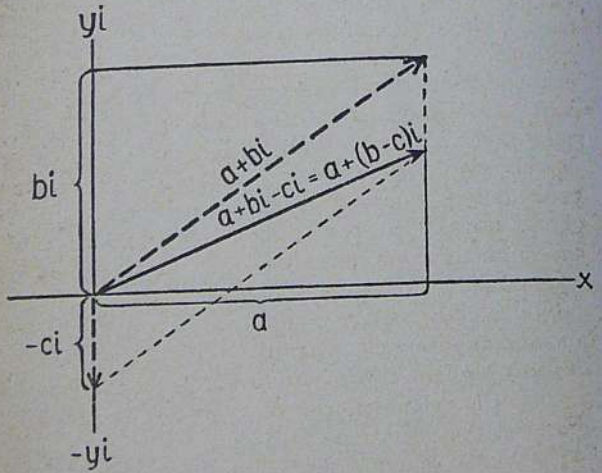


FIG. 12

meri ipercomplessi del tipo $i + ix + iy + kz$, nei quali i è la parte scalare e $ix + iy + kz$ la parte vettoriale. Vennero inventati principalmente per i movimenti nello spazio e richiedono quattro coordinate. Le regole di calcolo con questi quaternioni sono assai complicate, e si può solo accennare che la moltiplicazione dei quaternioni non possiede la proprietà commutativa, cioè per due quaternioni moltiplicati tra di loro risultano due prodotti diversi, secondo la sequenza dei fattori. Felix Klein, al quale abbiamo già tolto dati d'ogni ge-

nere, nelle sue lezioni sullo sviluppo della matematica nel secolo decimonono dice che i quaternioni avevano suscitato in Inghilterra un tale entusiasmo, da diventare quasi il credo della scuola di Dublino. Dànno luogo del resto a una forma di trattazione così elegante e si adattano in modo così simmetrico a certi problemi della fisica, che dovevano necessariamente condurre a una enorme sopravalutazione delle loro possibilità. Così nel 1895 venne costituita in Inghilterra una "Lega mondiale per lo sviluppo dei quaternioni", che si proponeva come ultima mèta una "teoria quaternionistica delle funzioni", da cui si sperava una completa rivoluzione della matematica e in un certo senso anche la soluzione di tutti gli enigmi di questo mondo. In occasione di tali studi si stabilì infine che può esistere un'algebra quaternionistica, nella quale non è valido il teorema fondamentale dell'algebra, dove si ha per esempio un'equazione cubica che ammette come soluzione tutti i quaternioni immaginabili.

Non si può sapere oggi dove ci condurrà questa nuova conquista della matematica. Finora i quaternioni devono segnare al loro attivo l'impiego fattone nella teoria della relatività, che deve ad essi in certo qual modo la sua perfezione formale.

Dobbiamo dunque dire che questo "mondo delle idee" ha avocato a sé in molte guise la signoria su tutte le altre province della matematica e della fisica matematica e ha contribuito, sia come mondo dei prototipi sia come mondo dei vettori, alla fondazione della teoria delle funzioni e dell'analisi vettoriale, cosicché ci troviamo oggi di fronte a un nuovo e grandioso mondo matematico in pieno sviluppo, al quale appartengono come discipline ausiliarie anche la geometria pluridimensionale, la geometria non-euclidea e la geometria proiettiva, che hanno tra loro i rapporti più svariati.

È giunto però da un pezzo il momento di parlare dei grandi uomini che posero le basi della teoria delle variabili complesse, cioè della teoria delle funzioni in senso ristretto. Essi sono Bernhard Riemann e Carl Weierstrass, così definiti da Felix Klein, anch'egli un astro matematico di prima grandezza: "Riemann è l'uomo dall'intuizione scintillante, che con la sua vasta genialità supera tutti i contemporanei. Negli argomenti che suscitano il suo interesse comincia *ex novo*, senza lasciarsi fuorviare dalla tradizione e senza riconoscere alcuna restrizione di sistemi. Weierstrass è innanzi tutto un logico; procede lentamente, sistematicamente, passo passo. Qualsiasi lavoro intraprenda, si sforza di raggiungere la forma definitiva". Aggiungiamo che la vita esteriore di questi due luminari, ai quali il mondo è debitore dei maggiori progressi matematici del secolo decimonono, si conformò alle loro tendenze, o per meglio dire, le loro tendenze furono come un'immagine della loro esistenza.

Riemann, nato nel 1826, era, al pari di Abel, figlio di un parroco di campagna. La Divina Provvidenza, alla quale egli credette con calma e sublime devozione come nessun altro, gli concesse meno di quarant'anni di vita, una vita che fu tutta una *via crucis*, come difficilmente si può immaginarla. Perdette presto la madre, nel 1835 il padre e una sorella, nel 1857 un fratello, nel 1864 un'altra sorella: inesorabile destino di una famiglia consunta dalla tisi, che afferrò presto anche lui. Nel 1862 si sposò, ma dopo appena un mese venne colpito da una pleurite, che fu l'inizio della fine. Visse ancora tanto da godere la felicità della nascita di un bambino, avvenuta a Pisa nel 1863, tuttavia gli ultimi tre anni della sua vita, trascorsi per massima parte in Italia, non sono oramai che un sogno confuso. Nel 1865 corse a Gottinga, sede della sua attività, e cercò durante l'inverno di salvare quello che si poteva ancora salvare del suo lavoro. Improvvisamente, all'ini-

zio dell'estate, sente che tutto è finito. Sorge allora prepotente l'ultimo desiderio della sua vita, e vuole recarsi in Italia. La guerra con l'Austria gli sbarra la strada. A Kassel la ferrovia è interrotta; ciò malgrado è deciso di andare verso il sud, in carrozza, a piedi se occorre. Il 28 giugno arriva finalmente sul Lago Maggiore e il 20 luglio muore come un santo nel giardino della Villa Pisoni a Selasca presso Intra. Lavorò fino all'ultimo giorno, sfruttando fino alla fine il tempo deplorevolmente breve di soli quindici anni a lui concesso per erigere la sua poderosa costruzione mentale.

In tutto ciò che intraprese, l'universo matematico rifulse di uno splendore mai visto. La sua tesi di docenza del 1854, *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria*, è il prodotto classico di una matura conoscenza, e lo stesso Gauss, anch'egli già segnato dalla morte, quando l'udí, ne rimase profondamente colpito. Tuttavia, fin dal 1851, all'età di venticinque anni, aveva presentato come dissertazione di dottorato i suoi *Fondamenti di una teoria generale delle funzioni di grandezze complesse*, che rimase del tutto senza eco, benché contenga tutto ciò cui si deve il progresso della matematica moderna. Fu destino di Riemann d'essere trascurato e dimenticato, benché sul terreno accademico non sia stato affatto messo da parte e abbia anzi raggiunto relativamente giovane la cattedra. Il comportamento riservato, la scienza esoterica e profonda di Riemann, fecero sí che ancora verso il 1890 il suo nome mancasse nei manuali. Un fatto assai sorprendente, spiegabile però con la natura della materia da lui trattata, che neppur noi siamo in grado di descrivere in forma approssimativamente accessibile. Ci dobbiamo accontentare di dire che la "superficie di Riemann" è una delle rivelazioni piú geniali della matematica, essendo possibile rappresentare su questa superficie il campo e l'andamento di funzioni anche complicate, rendendo

visibile e comprensibile quello che altrimenti sarebbe rimasto in perpetuo una pura astrazione.

Anche per Weierstrass non ci troviamo in condizioni migliori, benché a lui sia stato concesso di portare a maturità le sue idee, nel corso di una lunga vita. Egli nacque nel 1815 a Ostenfelde vicino a Münster. Da principio studiò legge a Bonn e fu membro attivo della corporazione "Saxonia". Ebbe una vita piuttosto movimentata, talvolta addirittura miserabile. Dal 1842 al 1848 fu insegnante ginnasiale a Deutsch-Crone nella Prussia occidentale, dal 1848 al 1855 insegnante nel Collegium Hoseanum a Braunsberg nella Prussia orientale; ottenne nel 1854 il dottorato onorario a Königsberg e nel 1856 fu nominato professore di matematica a Berlino. Là insegnò per quasi trent'anni, davanti a un numero di ascoltatori sempre crescente, e morí nel 1897. Aveva l'abitudine di non far stampare nulla ed esigeva che le sue lezioni circolassero in copie trascritte a mano, non ammettendo alcun mezzo meccanico di riproduzione.

Come già s'è accennato, dobbiamo a Weierstrass il perfezionamento logico della teoria delle funzioni e la scoperta che le funzioni continue e differenziabili sono appena una minuscola isola nell'oceano di tutte le funzioni. Weierstrass studiò inoltre principalmente le serie di potenze, nelle quali egli trasformava le funzioni.

Prima di chiudere questo capitolo vogliamo dare almeno uno sguardo generale ai problemi trattati dalla teoria delle funzioni, a cui si è fatto indirettamente accenno. A questo scopo sfogliamo un'opera moderna sulla teoria delle funzioni e troviamo che vengono premessi come concetti fondamentali gli studi teorici sugli aggregati di punti nel piano e sulle funzioni di variabile complessa dal punto di vista della definizione, della continuità e della derivabilità. Seguono i teoremi sugli integrali, tra cui occupano un posto eminente le formule di Cauchy. Vengono poi gli studi sulla con-

vergenza e le ricerche sugli sviluppi in serie delle funzioni analitiche, prendendo in considerazione le funzioni trascendenti e infine i cosiddetti "punti singolari". Qui è da osservare che, per esempio, il comportamento delle funzioni analitiche all'infinito appartiene a questo studio dei punti singolari. Con ciò sono poste le basi generali della teoria. Una teoria speciale si occupa ora piú da vicino delle funzioni monovalenti, alle quali appartengono le periodiche, e delle polivalenti, che noi conosciamo già sotto forma di radici e di logaritmi. Di queste ultime funzioni troviamo anche una rappresentazione sulla superficie di Riemann.

Naturalmente questa breve scorreria attraverso un trattato particolarmente accessibile sulla teoria delle funzioni, come è quello del Knopp, non deve significare altro che un incitamento e un indirizzo, poiché la teoria delle funzioni rimarrà sempre una disciplina che ai matematici in senso ristretto serve come superscienza per il controllo e la sistemazione di piú vasti campi della matematica. La sua importanza pratica è assai grande, in conseguenza dell'impiego di funzioni complicate fatto nella fisica. Ma è cosí difficile spiegare e apprendere elementarmente questa teoria, che non esiste per ora alcuna speranza di modificare il suo carattere esoterico.

Terminiamo perciò questo capitolo, senza osar penetrare ulteriormente in tale materia, e mettiamo ancora una volta in evidenza che oggi il "mondo spirituale matematico" domina le regioni sottostanti della matematica e racchiude completamente in sé il regno dei numeri. Non si deve dedurre da ciò che anche in questo campo non siano possibili nuove scoperte e nuove rivelazioni — non dimentichiamo che proprio i numeri complessi furono designati come *impossibiles* per migliaia d'anni.

XVII

HILBERT

Matematica e logica

Nei capitoli precedenti abbiamo cercato di gettare un po' di luce sullo sviluppo della matematica nell'ultimo secolo. In questo modo abbiamo potuto, nella disorientante molteplicità di tante geniali scoperte, metterne in rilievo qualcuna che all'occhio esercitato appare come rappresentativa di un'epoca storica o fattore determinante di un particolare indirizzo. Cercheremo ora di raggiungere un punto di vista piú elevato e di semplificare quanto abbiamo già sentito. È infatti legge immanente di qualsiasi indagine che si sia colpiti innanzitutto dalle singolarità, dalle diversità, dalla varietà, poiché di solito si arriva alla comprensione di un oggetto solo partendo dal particolare. Lentamente e con gran fatica si rivelano le relazioni piú riposte, le differenze scompaiono, e dalla sommità raggiunta la vista appare chiara e limpida. Questa "legge della contrazione dei particolari", come si potrebbe chiamarla, non è mai tanto attiva quanto nel caso di una scienza in pieno sviluppo. In mille luoghi si lavora sui particolari, si cercano nuove vie, si fanno nuovi sondaggi. Qualcuno di questi sondaggi incontra sorgenti o filoni di minerali sconosciuti. Sono essi in relazione con altri depositi scoperti nella vallata vicina? A quale sistema idrico appartiene la sorgente? Verso quale parte correrà il ruscello? Abbiamo trovato la via piú breve per le Indie o scoperto un nuovo continente? Né la sorgente né il filone ci dànno risposta a queste domande. A volte passano secoli prima che si arrivi a conoscere

tutte le relazioni riposte. A volte, come nel caso dei numeri irrazionali, si considera quest'indagine quasi come un delitto meritevole di morte, finché dopo migliaia d'anni si arriva ad affermare che senza gli irrazionali il concetto di continuità sarebbe privo di senso e il piano dei numeri, nella migliore ipotesi, solo un reticolato di punti.

Si può dire che non solo la Terra, ma anche il mondo intellettuale gira in un cerchio; o forse in una spirale che avvolge il punto centrale in volute sempre piú larghe, oppure, secondo come la si considera, si avvicina ad esso in spire sempre piú fitte. E si troverà difficilmente un matematico il quale, nelle ore di raccoglimento, di malumore o di disperazione, non si ponga la domanda se tutto il suo mondo matematico non sia per caso un'enorme bolla di sapone. Certo, il matematico s'inorgoglisce talvolta citando i meravigliosi successi che hanno portato il braccio dell'uomo fino alle piú lontane nebulose a spirale e gli dànno i poteri di un mago o di un profeta. Ma è proprio vero tutto questo o si tratta solo di una tremenda illusione? Si riesce a mala pena a calcolare il volume di una quercia nodosa: a che servono allora tutte le teorie sulle variabili complesse?

Bisogna ammettere che questo caos di sentimenti ha la sua giustificazione; ma anche qui non è tutto così semplice. Quando l' "uomo della strada" guarda tranquillamente l'orologio, apre la radio e si diletta nell'ascoltare la cronaca sportiva, può bene affermare in buona fede, dal punto di vista soggettivo, di essere arrivato senza matematica a questo stato di benessere e di godimento della vita, e che per lui tutta la matematica superiore è ciarlataneria. Dimentica però un'inezia, e cioè che il suo "benessere" gli è stato procurato da altri mediante la matematica. Tutto, a cominciare dall'orologio. Ma non vogliamo perderci piú a lungo in simili sciocchezze; intendiamo solo dire che perfino

nel pensiero di grandi matematici s'insinua talvolta un barlume di questa mentalità volgare. Partoriscono le montagne e nasce un topolino: spesso cosí appare agli studiosi stessi tutta la loro attività. Deve esser nata da questi dubbi l'esclamazione del matematico francese Brunschwicg: "È un istante solenne quello in cui due campi della matematica vengono a contatto l'uno con l'altro". Allora infatti, aggiungiamo noi, si può sperare che parte della confusione si risolva.

I nostri lettori non matematici penseranno che negli ultimi capitoli li abbiamo sopraffatti con una farragine di particolari e di notizie sensazionali sempre piú difficili. Al contrario! Con sollecitudine addirittura paterna li abbiamo tenuti lontano dagli orrori del particolare, mostrando loro da sommità elevate vasti paesi che, visti di lassú, paiono stendersi pacificamente al sole. Quando viceversa si percorrono questi paesi, si è subito attorniati da un rumore assordante, calca, tumulto, rovina e grida selvagge. E le vie per le quali si vorrebbe fuggire diventano piú inaccessibili e intricate del labirinto cretese. Abbiamo taciuto di molte cose. Non abbiamo detto nulla sulle superfici di ordine superiore, nulla sugli spazi non orientabili, nei quali dopo compiuto il giro del mondo ci si ritrova il cuore dal lato destro, mentre l'amico rimasto fermo a casa lo conserva dal lato sinistro. Il caso piú semplice di uno spazio cosiffatto è il noto foglio di Möbius, che ognuno può fabbricarsi incollando un anello di carta nel modo indicato dalla figura e descrivendo su di esso con un sol tratto dalle due parti una linea chiusa su se stessa. Si vede che "circumnavigando" questo mondo la destra e la sinistra risultano scambiate, cosa incomprensibile a un essere piatto che non potesse sollevarsi nella terza dimensione.

Non abbiamo neanche parlato della grande emozione suscitata da tutte queste scoperte geometriche. Cosí per esempio il famoso astrofisico Zöllner (nato nel 1834),

ben conosciuto per le sue indagini sulle protuberanze e sulle righe spettrali, venne una volta a sapere per caso da Felix Klein che un nodo in un R_3 era un caso di geometria di posizione, cioè rimaneva "invariante" secondo la sua natura rispetto a qualsiasi distorsione. Viceversa in un R_4 lo stesso nodo potrebbe essere sciolto mediante una semplice "distorsione". Klein fu stupito dell'entusiasmo con cui Zöllner apprese questa novità; ma inorridì addirittura quando seppe che Zöllner si era associato all'allora celebre medium e occultista americano Slade, poi smascherato, per dimo-

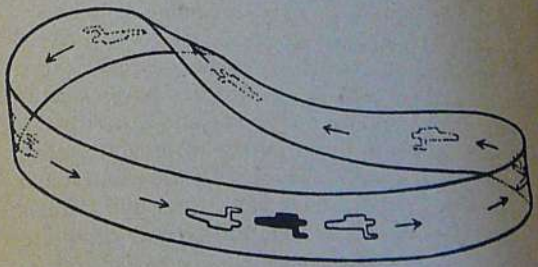


FIG. 13

strare in base allo scioglimento dei nodi l'esistenza reale dello spazio a quattro dimensioni. Grazie alle arti prestidigitatorie di Slade gli esperimenti riuscirono, malgrado che i nodi venissero sigillati e malgrado altre misure di sicurezza. Zöllner non si fermò piú. Iniziò un'attività febbrile, fece stampare negli ultimi anni della sua vita innumerevoli dissertazioni e morí nel 1882, non ancor cinquantenne, di un colpo apoplettico.

Abbiamo però taciuto molte altre cose. In primo luogo il calcolo delle probabilità, che ha raggiunto oggi una estrema perfezione, e penetra sempre piú in tutte le scienze, sostituendo la concezione classica dell'universo, dominato da "leggi", con quella di un uni-

verso "statistico", nel quale non esiste sicurezza, ma solo diversi gradi di probabilità. Non abbiamo neanche detto che Hamilton, Cayley e altri matematici hanno ampliato l'algebra con un calcolo simbolico, che supera in generalità e novità tutto quanto è stato fatto finora: né abbiamo potuto illustrare il calcolo combinatorio, che per alcuni matematici è diventato addirittura la base di qualsiasi indagine. Per tacere poi delle sublimi altezze della teoria dei numeri, di cui anche chi ha una discreta cultura matematica può difficilmente formarsi un'idea.

Ma non basta. Vi è oggi nel regno della matematica qualcosa di piú diffuso, qualcosa che il profano non dovrebbe sapere. Cosí, per esempio, un uomo come Felix Klein, uno tra i piú grandi geometri e specialisti di teoria delle funzioni del secolo decimonono, fu accusato dai "quaternionisti" inglesi, dopo la sua esposizione dei quaternioni di Hamilton, di parlare di tutt'altra cosa che dei quaternioni. E dell'altrettanto celebre Kronecker fu detto da Henri Poincaré che non avrebbe mai concluso nulla di geniale se non avesse dimenticato momentaneamente le basi filosofiche delle proprie ricerche. Non accadde diversamente con Riemann e Weierstrass, ed è incontestabile che vi sono degli argomenti dove anche i grandi matematici non arrivano piú a comprendersi tra di loro.

Parliamo qui di quelli effettivamente competenti, e non degli innumerevoli filosofi matematicizzanti, i quali con tutta sicurezza esprimono giudizi sulla "natura della matematica", e subito tacciono imbarazzati quando in risposta alle loro affermazioni si presenta loro un semplice esempio preso da qualche argomento concreto in un qualsiasi campo della matematica.

Tutto questo non deve però impedirci di tentare una semplificazione su basi solide di questa specie di torre di Babele. Teniamo dunque per fermo che il concetto di numero rimarrà, e dovrà sempre rimanere, il

fondamento di tutta la matematica. Proprio in questo campo nel secolo decimonono si è guadagnato molto terreno col perfezionamento della teoria dei numeri complessi, e anche la teoria delle equazioni ha avuto la sua parte nel rafforzare e nell'ampliare il concetto di numero, essendo strettamente in relazione con radici, numeri irrazionali e complessi. Il secolo decimonono ci ha dato inoltre nozioni definitive sulla non risolubilità delle equazioni di grado superiore al quarto e sulla impossibilità della quadratura del circolo (Lindemann, 1882). Abbiamo poi ottenuto nei determinanti, negli aggregati e nei gruppi, nuovi "supernumeri", coi quali operiamo già abbastanza facilmente. Infine, la geometria descrittiva, la proiettiva e la geometria non euclidea hanno inteso iniziare una nuova importante ascesa della geometria, che supera tutto quanto era stato fatto in precedenza.

Era chiaro che, — dopo tutto quanto era avvenuto nel secolo decimonono nel campo della matematica, della fisica e della filosofia, — nella mente e nell'animo di piú d'uno sorgesse il desiderio di ordinare l'enorme caos delle scoperte e delle generalizzazioni. Si cercò anche di mettere a nudo, per cosí dire, le radici di tutta questa lussureggiante fioritura. Nelle questioni geometriche si aveva per tale lavoro un luminoso esempio, cioè Euclide, alla cui caduta per opera delle geometrie non euclidee credevano solo i progressisti smaniosi di novità, che avevano a cuore la dissoluzione e la dimostrazione della relatività di qualsiasi scienza positiva.

David Hilbert (nato nel 1862), da ultimo professore a Gottinga, riuscí a chiarire in modo quasi definitivo tutto il complesso di questioni riguardanti le basi della geometria, e il suo sistema di assiomi è una delle opere piú importanti del secolo decimonono. Questo sistema permette infatti di porre in evidenza la costruzione e le condizioni caratteristiche di ogni tipo di geometria.

Tralasciando semplicemente certi assiomi, otteniamo con tutta facilità le geometrie non euclidee, non archimediche e simili, e ci rendiamo conto di come possano esistere geometrie ineccepibili, che ai nostri sensi educati alla scuola di Euclide appaiono a prima vista pazzia. Hilbert però nei suoi *Fondamenti di geometria*, fece molto di piú. Anzitutto dimostrò che l'associazione della geometria e dell'aritmetica, cioè grandezza e numero, si può mantenere quando tutte le regole di calcolo dei numeri reali valgano in modo identico anche per il cosiddetto calcolo lineare, cioè per il calcolo con le grandezze. Per dimostrare una tale identità, grandezza e numero oppure numero e grandezza devono potersi scambiare, *mutatis mutandis*, l'uno con l'altra. Questa possibilità, che si trova come tacita premessa in fondo a qualsiasi geometria analitica e metrica, è la base indispensabile per la sua giustificazione logica. Come dimostra Hilbert, l'associazione tra grandezza e numero non è senz'altro ovvia, ma deve essere accuratamente verificata e dimostrata, basandosi sulla geometria proiettiva, specialmente sui teoremi di Pascal e di Desargues.

Non vogliamo tacere che anche i geometri Pasch e Schur, Zermelo e altri hanno preso parte sotto vari aspetti a quest'analisi dei fondamenti assiomatici. Essa è del resto da almeno cinquant'anni all'ordine del giorno e non si è mai vista tanta diligenza nel consolidare il patrimonio mentale acquistato.

Le cause di tanto lavoro sono assai profonde e vanno cercate in diverse direzioni. Dal punto di vista puramente storico si tratta dell'"assorbimento" di Euclide nel ciclo di cultura faustiano. Ma ciò solo in parte: vi è infatti dietro tutti questi sforzi lo spirito di Raimondo Lullo. Psicologicamente non ci si è ancora liberati dal sogno della "macchina pensante", della "caratteristica generale", dell'*ars inveniendi*, e si cerca di giungervi con la logica matematica quando con l'algo-

ritmo e col calcolo non si va piú avanti. Succede cosí per la logica come per la geometria. Abbiamo parlato a suo tempo della tragicomica sfida della geometria proiettiva al vittorioso algoritmo dell'algebra. La conclusione fu una completa algebrizzazione della geometria, per cui geometria proiettiva e algebra si fusero in modo quasi indissolubile e la geometria rivoluzionaria diventò nient'altro che un'algebra delle forme, delle invarianze e di altre relazioni. L'algebra appare come una lampada, verso cui le farfalle delle altre discipline non possono volare impunemente. E anche quando la logica cominciò improvvisamente ad atteggiarsi a supermatematica, si presentò come superscienza e cominciò ad operare con tutti i mezzi del simbolismo, si vide ben presto che non aveva fatto altro che algebrizzarsi in tutta segretezza. Come accade a un conquistatore vittorioso, che occupa un paese straniero, ma assorbe poi la lingua e i costumi dei popoli soggiogati, cosí fu della logica. E solo confondendo interamente i concetti si può affermare con serietà che l'idea del calcolo e della scrittura simbolica è una categoria logica e non matematica.

Non vogliamo affatto porre in dubbio l'efficacia di questa "estensione della logica", finché si mantiene entro limiti ragionevoli. Ma quando si afferma d'un tratto che la matematica "risulta" essere niente altro che un complesso di tautologie e di circoli viziosi, lo storico della matematica ha il dovere di mostrare come questa affermazione sia per lo meno unilaterale, anche se non si può senz'altro smentire, perché ammette come postulato ipotesi del tutto arbitrarie; e cioè i limiti di competenza della matematica e della logica. Per migliaia d'anni la matematica si è servita delle operazioni logiche, della deduzione, della dimostrazione e dell'analisi. Essa ha cercato anche continuamente e quasi in ogni epoca di non urtare questo "criterio negativo della verità", come lo chiama Kant.

Fu però costretta a rispettare non solo la logica formale, ma anche la trascendentale. Doveva in più lavorare sempre sull'orlo della metafisica, e perfino della mistica, altrimenti non avrebbe conosciuto proprio i suoi successi più brillanti.

In mezzo a tali pastoie e combattendo contro di esse si è sviluppata la matematica e, se si guarda alla sostanza, difficilmente può esservi dubbio su che cosa s'intenda come pensiero matematico e procedimento matematico. Quando perciò una scienza finora sempre subordinata alla matematica comincia all'improvviso a servirsi dei risultati generali raggiunti da questa per accampare pretese di superiorità, è come se la sostanza della questione venisse capovolta.

A questo punto citeremo alcune parole di Hilbert, tolte dal suo trattato *Logica e aritmetica*, le quali secondo noi rendono molto chiaramente la nostra idea: "Si è soliti indicare l'aritmetica come una parte della logica e si basa l'aritmetica sui concetti fondamentali della logica. Solo con un'osservazione accurata ci si avvede che nella rappresentazione delle leggi della logica sono già in uso certi concetti fondamentali dell'aritmetica, come il concetto di quantità, e in parte anche il concetto di numero, specialmente inteso anch'esso come quantità. Capitiamo perciò in un bivio, e per evitare paradossi è necessario ammettere uno sviluppo in parte contemporaneo delle leggi dell'aritmetica e di quelle della logica".

Abbiamo citato di proposito non un intuizionista o un mistico della matematica, ma uno dei logici più rigorosi e rinomati. Siamo convinti che quest'opinione imparziale e obiettiva debba prevalere sull'idea di una subordinazione di una delle due scienze all'altra, perché la soppressione o la modificazione dei confini tra di esse alla lunga non può essere di vantaggio per nessuna. E crediamo inoltre che la storia in un futuro non troppo lontano parlerà di un'epoca della matema-

tica caratterizzata dalla "contesa per la priorità tra logica e matematica", intesa la priorità non dal punto di vista del tempo, ma da quello della critica scientifica.

Ripetiamo: non è affatto nei nostri intendimenti di misconoscere e sminuire gli sforzi per una fondazione logica e una purificazione della matematica. Chi facesse questo non avrebbe a cuore la verità e darebbe prova di una riprovevole leggerezza. D'altra parte, il tentativo oggi diffuso di mettere a ogni costo il catenaccio alla produttività della matematica e di suscitare la sciocca credenza che tutto sia oramai "esplorato", ci sembra un peccato contro lo spirito, tale da meritare una netta confutazione. Una simile sterilità alla Backmesser, che si ammanta di puritanismo come tante altre, sbarra ai "maestri cantori" della matematica, specialmente agli Stolzing, quella strada sulla quale, secondo quanto c'insegna la storia, la scienza finora ha sempre progredito. Infatti non c'è bisogno — e qui sta il pericolo — che ogni matematico d'ingegno sia *a priori* un grande logico e filosofo di professione. Potrebbe accadere che coloro i quali sono destinati a diventare i grandi matematici del futuro si perdano d'animo, vedendo davanti a sé il caos che devono attraversare, oppure di fronte all'obiezione filosofica che essi verrebbero a cadere con la loro attività in un cerchio magico insormontabile.

Il nostro ammonimento di precisar meglio le cose dal punto di vista storico nei confronti di questa invadenza della logica nella matematica, esagerata e unilaterale, ma probabilmente passeggera, e che in verità secondo tutte le apparenze non è se non la tragicommedia della matematizzazione della logica, non è rivolto ai competenti, che certo conoscono tutte queste circostanze e non intendono i loro propri insegnamenti in modo così unilaterale come fanno quelli che non considerano né la matematica, né la logica, né la filo-

sofia, né la storia della cultura in modo abbastanza generale. Riassumendo: da quando è stata iniziata l'analisi dei fondamenti della matematica, e dopo l'invenzione del calcolo logico, ci troviamo in un'epoca della matematica e della logica estremamente emozionante e interessante, la quale, con la creazione delle logiche polivalenti e con l'unione di queste alla teoria delle probabilità, dovuta a Reichenbach, non difetta certo di incognite; tanto che un freddo storico della matematica potrebbe dire con un certo scetticismo che tutte queste complicazioni non hanno ancora dato la dimostrazione della loro capacità produttiva.

Lasciamo stare perciò gli ardui argomenti della matematica logica e della logica matematica, che in ogni caso potremmo appena sfiorare, e, alla fine di questo viaggio nel tempo e nello spazio, rivolgiamoci piuttosto una domanda: quale argomento principale potrebbe essere assunto come rappresentativo di tutto il lavoro svolto dopo Leibniz, specialmente nel secolo decimonono e agli inizi del ventesimo? Ci rendiamo conto che con ciò si lascia in un certo senso il terreno dei fatti positivi, per entrare in quello delle impressioni soggettive; cercheremo tuttavia di evitare che queste impressioni degenerino in sogni o fantasticherie.

Rivolgendoci indietro a contemplare la lunga e faticosa via che abbiamo percorsa insieme, ci si presenta un'interessante caratteristica, che sta piú o meno alla base di tutte le scoperte degli ultimi cinquant'anni. La designeremo per ora molto approssimativamente come "prospettiva" o "analisi della similitudine" o "trasformazione dell'unità di misura". Se guardiamo alla sostanza, tutte e tre queste cose sono intimamente collegate. Non vogliamo però lasciarci fuorviare dall'accenno a relazioni di maggiore portata, ed esaminiamo invece in particolare la nostra affermazione.

È cosa evidente, e non ha bisogno di spiegazioni, che la geometria descrittiva e proiettiva e in generale

ogni geometria di posizione si occupi e debba occuparsi delle tre categorie concettuali ora citate. Questa tendenza a raffigurare tutte le cose sotto altri punti di vista, a trasformarle, a indagare quello che in esse è durevole e quello che non lo è, ha superato però i limiti ristretti della geometria descrittiva e proiettiva, diventando, ad esempio nel caso delle geometrie non euclidee, l'assoluta generalizzazione del concetto di geometria. Perciò si è sviluppata anche l'idea di una zona "invariante" o "insensibile", comune a tutte le geometrie, e chiamata da diversi autori "geometria assoluta" in confronto alle infinite geometrie "relative" possibili. Poiché da Descartes in poi esiste uno stretto parallelismo, se non addirittura un'identità, fra geometria e algebra, che vengono trattate entrambe come stati vassalli di un impero superiore delle pure forme (*), non vi era affatto da meravigliarsi che il mutamento di vedute nel campo della geometria avrebbe portato anche un mutamento nella costituzione del regno dell'algebra e del simbolismo universale. A quest'ordine d'idee appartengono tutte le scoperte classiche sulla congruenza nel senso di Gauss e sui gruppi. In tutte queste costruzioni mentali troviamo sempre il problema di determinare che cosa rimanga inalterato o "invariante" malgrado tutte le deformazioni, le prospettive e le sostituzioni o trasformazioni. A proposito di queste ricerche intorno a relazioni nascoste, ci vien fatto di ricordare le "coincidenze" di Cusano. Naturalmente l'analogia tra il concetto scolastico di "coincidenza" e il concetto moderno di "invarianza" è molto approssimativa, ma esiste tuttavia, in qualche modo, nell'indirizzo psicologico col quale vengono affrontati questi problemi.

Qual è dunque il significato recondito e lo scopo

(*) Adoperiamo l'espressione "forme" in senso più lato di quanto faccia la teoria moderna, che intende con questo termine il lato sinistro di un'equazione ridotta uguale a zero.

ultimo di tutti questi prospettici? È solo una tendenza a contemplare le cose dai piú disparati punti di vista, per desiderio di chiarezza e di generalità? Certamente anche questi motivi hanno il loro peso, ma a nostro parere non costituiscono l'impulso principale. La "generalizzazione" in sé è infatti un'attività esclusivamente esteriore e per nulla introspettiva, mediante la quale si sarebbe solo ampliato il campo d'indagine, senza accostarsi affatto ai rapporti reali cercati. Anzi, con una sfrenata generalizzazione si rischiava perfino di allontanarsi dalla possibilità di cogliere questi rapporti. Cosí sembrò infatti agli osservatori superficiali. Viceversa la generalizzazione unita alla nozione di invarianza è qualcosa di fondamentalmente diverso dalla semplice estensione e sovrapposizione del materiale. Prendiamo un esempio semplice. Già Diofanto, e forse qualche altro matematico precedente, intuí che un'equazione non risolvibile come tale, lo diventa subito quando al posto dell'incognita si sostituiscano espressioni piú semplici o talvolta anche piú complicate. L'operazione del trasformare, che abbiamo visto operare con successo nella risoluzione data da Cardano dell'equazione cubica, non rimase limitata alle equazioni. In maniera assai piú generale, ma meno accessibile, comparve nella risoluzione degli integrali, e anzi diventò la premessa principale per l'utilizzazione di tutto l'algoritmo del calcolo integrale. Perché dunque una volta si può sostituire e un'altra no? Perché un tipo di trasformazione con certi integrali conduce alla mèta e con altri fallisce miseramente? Che cosa, come e dove è lecito trasformare? Con ciò non parliamo ancora della fisica teorica, dove questioni simili si presentano quasi ad ogni ora.

Era necessario portare una chiarificazione in tutti questi problemi dell'algoritmo, bisognava diminuire l'importanza dei singoli algoritmi, riducendoli ad algoritmi parziali, per mostrare la possibilità e la le-

gittimità dei passaggi da un gruppo di forme a un altro. A questo scopo servì in misura notevole anche l'introduzione dei numeri complessi. Abbiamo ripetutamente parlato del "mondo spirituale" della matematica, abbiamo confrontato le figure complesse con le idee platoniche e abbiamo affermato che esse sono, nella loro simmetria e perfezione, i prototipi di tutti gli altri numeri, spesso così mutilati, così sfigurati da difetti o imperfezioni "terrene", che non si possono quasi più riconoscere le loro vere proprietà; per cui si doveva necessariamente cadere in errori, evitabili soltanto prendendo ispirazione dai prototipi del mondo delle idee. Anche alla base di questi metodi vi è un'idea prospettica e figurativa. Si proietta, per così dire, il mondo reale nel complesso, e il complesso nel reale, osservando quali proprietà si conservano in questa trasformazione e quali no. E nel campo complesso si è in grado di eseguire operazioni quanto mai generali, i cui casi particolari — spesso assai limitati — sono le operazioni nel mondo dei numeri reali. Pensiamo soltanto al teorema fondamentale dell'algebra, alla distribuzione poligonale delle soluzioni e alla dottrina della divisione del cerchio da essa dipendente. Questa dottrina si sviluppa a sua volta dal lato trigonometrico, da quello costruttivo e da quello della teoria dei gruppi, e per esempio nella teoria dei gruppi si è in grado di formare con le soluzioni di un'equazione di grado n un "gruppo", che si può porre in relazione con altri, secondo l'algoritmo della teoria dei gruppi. Oppure pensiamo ai logaritmi, le cui proprietà diventano nello stesso tempo più chiare, ma anche più misteriose, quando apprendiamo che nel mondo delle idee a ogni numero corrispondono infiniti logaritmi. Queste proprietà del "mondo spirituale" appaiono inaspettatamente alla luce del giorno sulla nostra Terra, e sono altrettanto incomprensibili quanto demolitrici, quando non si conoscono i prototipi.

Esiste però un altro campo della matematica, che ha a che fare con questa "concezione prospettica del mondo", di cui stiamo parlando, come del tratto comune che hanno le ricerche scientifiche nel secolo decimonono. Intendiamo alludere al concetto di convergenza. Considerata otticamente, una serie convergente non è altro che una scala, le cui "unità" sono viste in prospettiva. Certe serie convergenti somigliano, figuratamente parlando, a un nastro graduato che si perda in lontananza, di modo che le singole "unità" impiccoliscono sempre piú fino a raggiungere il punto limite o, nel caso dei numeri complessi, la linea o il circolo di convergenza. Partendo da simili considerazioni, le geometrie non euclidee, la geometria proiettiva e la dottrina della convergenza si uniscono per formare una superiore unità. Di qui si passa anche a speculazioni cosmologiche, come per esempio alle vedute sull'universo chiuso e finito come conseguenza di una supposta struttura non euclidea dello spazio. Ma anche la teoria degli aggregati, che a prima vista con la sua infinità attuale non sembra seguire le leggi della prospettiva ma una sua strada particolare, si è inserita nella "concezione prospettica del mondo" del secolo decimonono e degli inizi del ventesimo. La "coordinazione per punti" degli aggregati è una proprietà prospettica, e tutte le questioni sulle unità di misura della geometria analitica, che opera su aggregati di punti, riconducono a problemi di questo genere.

Abbiamo cercato di mostrare con brevi accenni che tutta la matematica degli ultimi centocinquant'anni, per quanto multiforme, astrusa, esoterica e strana essa sembri, possiede ugualmente un "punto di convergenza" assai preciso, e questo punto sembra essere tutt'altro che un punto all'infinito. L'ombra del giacobino De Monge e dei suoi allievi, la cui opera fu ripresa in senso faustiano dai matematici tedeschi, aleggia su tutto il secolo, e noi riteniamo che si stia ora

preparando una sintesi di tutte queste premesse prospettiche, destinata a terminare in una "matematica della similitudine" nel senso piú generale. Rispetto ad essa, la matematica anteriore a Galois e a Gauss dovrebbe essere distinta col nome di "matematica dell'uguaglianza".

Naturalmente la costruzione sicura e impeccabile di questa sintesi, alla quale appartengono in notevole misura tutte le considerazioni sui vettori coi loro spostamenti, rotazioni, espansioni e contrazioni, non è possibile senza un controllo filosofico molto accurato. Sotto questo aspetto la collaborazione della logica si presenta non solo interessante, ma anzi assai vantaggiosa, purché questa si renda conto del proprio compito, che è esclusivamente di controllo, e non creda di essere l'arbitra di un universo logico-matematico. Questa idea a contenuto magico contraddice, come abbiamo cercato di spiegare, alla realtà della storia, e contraddice anche, come si potrebbe dimostrare esaurientemente, al piú profondo istinto di eminenti matematici.

Cosí per esempio Felix Klein, alla pag. 51 delle già citate *Lezioni sullo sviluppo della matematica nel secolo XIX*, dice che la "rigorosità" della matematica è un ideale derivato dall'antichità greca, consistente nella deduzione logica di tutta la matematica da un numero possibilmente limitato di premesse. "Vorrei ora" cosí prosegue Klein "mettere in evidenza che anche nel caso di una *rigorosità* ideale intesa in questo senso, rimane sempre un qualche elemento intuitivo e alogico nella costruzione dei fondamenti". E alla pag. 53 dice ancora: "Dallo studio della storia di questa nostra scienza risulta infatti che la *rigorosità* è stata qualcosa di relativo, una condizione che si è sviluppata solo col progredire della scienza. È interessante osservare come in un periodo incline alla rigorosità si creda ogni volta di aver fatto il massimo in questo senso, mentre

la generazione successiva supera di molto la precedente nelle sue esigenze e nei suoi risultati. Cosí è stato sorpassato Euclide, cosí Gauss, cosí Weierstrass. Sembra che in questo campo, cosí come per la creazione inventiva, non esistano limiti di sviluppo".

Queste parole vennero dette non come programma, ma come riassunto di una vita infinitamente ricca. Klein, allora piú che sessantenne, teneva le sue lezioni nei primi anni della guerra mondiale, cioè in un'epoca in cui tutte le ricerche sui fondamenti della matematica, che oggi vengono posti in discussione, esistevano già. A Klein erano ben noti Kronecker, Frege, Hilbert, solo per citare alcuni nomi, e cosí pure Poincaré, Couturat e altri.

Consideriamo perciò queste parole come qualcosa di piú che una fine osservazione. Al termine del nostro viaggio nello spazio e nel tempo non possiamo e non vogliamo accettare nulla che parli di decadenza o di conclusione. Al contrario: cosí come nella teoria delle monadi uno dei piú grandi della nostra scienza, Leibniz, eleva un cosmo sull'altro per arrivare infine alla monade delle monadi, a Dio, sembra chiaro, per ripetere in breve le parole di Klein, che non vi sono limiti allo sviluppo critico e produttivo della gloriosa e veramente sovrana scienza della matematica.

FINE

BIBLIOGRAFIA

Per il presente lavoro — oltre la letteratura matematica generale e i libri di testo piú in uso — ci siamo giovati principalmente delle seguenti opere speciali:

M. Cantor. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.*
I. Tropfke. *Geschichte der Elementar-Mathematik.*
S. Günther & H. Wieleitner. *Geschichte der Mathematik.*
Ambros Sturm. *Geschichte der Mathematik bis zum Ausgange des 18. Jahrhunderts.*
H. Wieleitner. *Geschichte der Mathematik.*
H. G. Zeuthen. *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter.*
P. Klein. *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik in 19. Jahrhundert.*
P. Boutroux. *L'idéal scientifique des mathématiciens.*
E. Löffler. *Ziffern und Ziffernsysteme.*
Fritz Kliem. *Apollonius.*
F. Kliem & G. Wolff. *Archimedes.*
A. Czwalina. *Archimedes.*
H. Poincaré. *La science et l'hypothèse.*
H. Poincaré. *La valeur de la science.*
D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie.*
Emile Picard. *Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois.*
S. Günther. *Die Anfänge und Entwicklungsstadien des Coordinatenprincipes.*
Dietrich Mahnke. *Zur Keimesgeschichte der Leibnizschen Differentialrechnung.*
Kk. de Vries. *Die vierte Dimension.*
Hans Mohrmann. *Einführung in die nichteuklidische Geometrie.*
Liebmann-Bonola. *Die nichteuklidische Geometrie.*

E, inoltre, degli scritti di Euclide, Archimede, Apollonio, Diofanto, Keplero, Descartes, Cavalieri, Newton, Leibniz, Eulero, Gauss, Riemann, Dedekind, ecc.

INDICI

INDICE DEI NOMI

Abel (Niels Henrik) - 259, 260, 261, 262, 270, 274, 294, 328.
Abul Vafa - 131.
Ahmes - 17, 95.
Alchaijami - 131.
Alembert (d') - 238, 259, 296, 316.
Alessandro Magno - 41, 43, 52.
Alkarchi - 131.
al-Khuwarizmi - 111, 115, 117, 119, 124, 124, 125.
al Mansur - 111, 129.
al-Ma'mun - 111, 129.
Anassagora - 36, 38, 58.
Anassimandro - 35.
Annibale - 52.
Apollonio da Perga - 23, 39, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 89, 90, 176, 180, 187, 202, 241.
Archimede - 39, 52, 53, 54, 55, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 79, 89, 90, 95, 113, 138, 163, 166, 176, 195, 198, 201, 218, 222, 234, 265, 293, 294, 307, 308.
Aristarco da Samo - 66, 90.
Aristippo - 34.
Aristotele - 14, 40, 41, 42, 43, 46, 55, 75, 140, 141.
Aryabhata - 117.
Bacone (Ruggero) - 139.
Baldus - 304.
Bartholin (Erasmo) - 181.
Becher - 219.
Beltrami - 307.
Bernoulli (fratelli) - 217, 218, 219, 220, 238, 296.
Bhaskaracarya - 117, 118.
Bieberbach - 289.
Boccaccio (Giovanni) - 154.
Boezio - 130.
Bohr - 32.
Boineburg (barone) - 202.
Bolyai (Giovanni) - 295, 305, 306.
Bolyai (Wolfgang) - 231, 293, 295, 304, 306.
Bolzano - 139, 283.
Bombelli - 154, 157.
Boutroux (Pierre) - 17, 172, 174, 239, 289.
Bradvardinus (Tommaso) - 139, 140, 148, 195, 282.
Brahmagupta - 117, 118.
Brianchon - 247, 248, 249, 252.
Briggs (Enrico) - 170.
Brunschwicg - 234, 334.
Buddha (Gotamo) - 10.
Burali-Forti - 286.
Bürgi (Jost) - 162, 165, 166, 167, 168, 169.
Büttner - 291.

Cambise - 13.

Cantor - 35, 103, 280, 283, 284, 285, 287.
Cardano - 153, 154, 155, 156, 157, 159, 161, 269, 344.
Carlo Magno - 111.
Carlo VI (imperatore) - 234.
Carnot - 245.
Cartesio, vedi Descartes.
Cauchy - 259, 260, 261, 270, 274, 316, 317, 330.
Cavalieri (Bonaventura) - 198, 199, 200, 201, 204, 213, 215.
Cayley - 336.
Cervantes - 115.
Ceulen (Ludolfo van) - 166.
Chasles - 243, 244.
Chevalier - 264, 270.
Chufu (o Cheope) - 11.
Chuquet - 153, 163.
Cirillo (vescovo) - 112.
Claudio Tolomeo - 90, 91, 92, 113.
Clavio - 170.
Colebrooke - 117.
Colombo (Cristoforo) - 152, 163.
Copernico - 66, 152.
Couturat - 348.
Cramer (Gabriel) - 238, 259, 274, 275.
Crelle - 244, 260, 262.
Cusano (Nicolò da Cusa) - 147, 148, 149, 151, 195, 282, 343.
Czwalina - 55, 56, 79.

Dedekind - 139.
Democrito - 36, 59, 61, 195.
Desargues - 240, 241, 242, 243, 244, 245, 338.
Descartes (Renato) - 24, 103, 126, 137, 143, 145, 151, 172, 175, 176, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 193, 194, 202, 235, 238, 241, 259, 312, 314, 343.
Dingler - 251.
Diocle - 90.
Diofanto - 88, 89, 92, 93, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 125, 131, 155, 159, 176, 178, 269, 344.
Dirichlet - 318.
Duns Scoto - 139, 142.
Dürer (Alberto) - 153.

Ehrenfried (Walter) - 217.
Eneström - 202.
Eraclito - 56, 57, 62, 149, 198.
Eratostene - 66, 69, 77.
Erone da Alessandria - 90, 92, 159.
Eschilo - 42.
Euclide - 27, 29, 34, 39, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 55, 56, 57, 60, 61, 75, 77, 78, 80, 87, 112, 113, 176, 177, 182, 209, 303, 304, 305, 306, 308, 337, 338, 348.
Eudemo - 14, 15, 16, 43.
Eudosso - 42, 60, 61, 67, 148, 195.
Eugenio di Savoia (principe) - 234.

Eulero - 74, 75, 170, 234, 238, 245, 259, 261, 292, 296, 316, 319.
Euripide - 42.

Federico II (imperatore) - 129.
Fermat - 110, 175, 176, 178, 201, 241.
Ferrari - 153.
Ferro - 153.
Fidia - 42.
Frege - 348.

Gabir-Ibn-Alflah (o Geber) - 131.
Galilei (Galileo) - 66, 152, 195, 198, 199, 218.
Galois (Evariste) - 258, 259, 262, 263, 264, 265, 270, 271, 272, 273, 292, 311, 347.
Gauss (Carlo Federico) - 115, 117, 231, 234, 243, 259, 261, 262, 270, 273, 274, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 298, 299, 301, 302, 304, 306, 307, 311, 316, 317, 329, 343, 347, 348.
Gelone. - 64.
Gerberto d'Aurillac - 133.
Gergonne - 246.
Gerhardt - 223.
Gerone - 71.
Giamblico - 31.
Giordano Nemorario - 138, 139.
Giovanni da Palermo - 129, 134.
Girard - 157, 187, 259.
Giuliano l'Apostata - 112.
Goethe - 193, 203, 288, 289.
Grassmann - 234, 253, 256, 287, 316.
Gregory (James) - 201.
Guldino - 200.
Günther - 115.

Hamilton (Sir William Rowan) - 317, 324, 325, 336.
Harriot (Thomas) - 160.
Harun ar-Rashid - 111, 129.
Hausdorff - 201, 286.
Heiberg (J. L.) - 69.
Heisenberg - 32.
Helmholtz - 256.
Hilbert - 182, 332, 337, 338, 340, 348.
Hindenburg - 238.
Hospital (L') - 217, 218, 230, 231, 274.
Hudde - 192.
Hultsch - 76.
Hutten (Ulrico di) - 174.
Huygens - 202, 204.

Kant - 16, 50, 62, 100, 101, 149, 251, 280, 291, 309, 324, 339.
Keplero - 166, 171, 195, 196, 197, 198, 201.
Klein (Felix) - 270, 307, 326, 328, 335, 336, 347, 348.
Klügel - 305.
Knopp - 318, 331.
Kronecker - 278, 336, 348.

Ipazia - 112.
Ipparco - 90.
Ippaso - 31.
Ippia - 58.

Ippocrate da Chio - 59.

Jacob (Simone) - 165, 166.
Jacobi - 262, 270, 273, 274, 275.
Jordan (Camille) - 270, 274.

Lagrange - 238, 259, 263, 270, 274, 292, 293.
Lambert (J. H.) - 305.
Laplace - 238, 239, 243, 274, 290.
Legendre - 238, 301, 306.
Leibniz - 69, 74, 114, 123, 181, 183, 192, 193, 194, 195, 197, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 238, 239, 240, 245, 265, 274, 275, 276, 279, 281, 312, 325, 342, 348.
Leonardo da Pisa - 129, 132, 134, 135, 137, 138.
Leonardo da Vinci - 74, 153.
Leopoldo I (imperatore) - 234.
Lie (Sophus) - 270.
Lindemann - 337.
Lobacevskij - 231, 307.
Luigi XIV - 192, 203, 234.
Luigi XVI - 244.
Lullo (Raimondo) - 139, 161, 203, 312, 338.

Mahnke (Dietrich) - 205, 206.
Malebranche - 194.
Mamerco - 15.
Marcello (M. Claudio) - 52, 53, 54.
Menecmo - 78.
Menelao di Alessandria - 90, 113.
Mersenne - 188.
Meyer (Conrad Ferdinand) - 174.
Meziriac (Bachet de) - 104, 176.
Möbius - 334.
Mohrmann - 308.
Moivre - 296.
Monge (Gaspard de) - 243, 263, 264, 346.
Mozart - 74.

Napier (Lord) - 161, 165, 166, 169, 170.
Napoleone - 244.
Neil - 322.
Nesselmann - 49, 94, 98.
Newton (Isacco) - 170, 192, 195, 201, 202, 214, 217, 218, 219, 225, 226, 227, 232, 233, 235, 292, 294, 303.
Nicomano di Gerasa - 92, 130.
Nicomede - 90.
Nostradamus - 173, 203.

Occam (Guglielmo) - 139.
Omero - 324.
Oresme (Nicola d') - 136, 142, 143, 144, 145, 146, 175, 195, 198.
Oreste - 112.

Paciuoli (Luca) - 152.

Pappo - 111, 113, 180, 195.
Parmenide - 35, 55, 56.
Pascal (Blaise) - 201, 202, 204, 208, 240, 241, 242, 244, 245, 247, 248, 249, 252, 338.
Pasch - 304, 338.
Perseo - 90.
Peuerbach - 137, 161.
Picard - 263, 273.
Pietro il Grande - 234.
Pipino - 111.
Pitagora da Samo - 7, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 44, 45, 48, 49, 69, 78, 79, 83, 91, 94, 130, 132, 193, 216, 265.
Platone - 22, 34, 41, 42, 43, 46, 60, 78, 114, 313.
Poincaré (Henri) - 251, 289, 310, 336, 348.
Poncelet - 235, 243, 244, 245, 246.
Prassitele - 42.
Proclo Diadoco - 14, 15, 27, 43, 50, 111, 303.

Raffaello - 74, 75.
Regiomontanus - 137, 161.
Reinchenbach - 342.
Riemann (Bernardo) - 234, 273, 287, 307, 313, 321, 328, 329, 331, 336.
Riese (Adamo) - 153.
Roberval - 206.
Rudolff - 153.
Russell - 286.

Saccheri - 47, 305, 306.
Schiller - 193.
Schläfli - 253.
Schopenhauer - 20, 46.
Schrödinger - 32.
Schur - 338.
Schweinkart - 306.
Scoto Eriugena - 132.
Simmel (Georg) - 74, 309.
Sinesio - 112.
Slade - 335.
Socrate - 34.
Sofocle - 42.
Spengler (Oswald) - 41, 69, 89, 113, 146, 172, 195, 265, 290.
Staudt (von) - 243, 244.
Steiner - 244.
Stifel (Michael) - 153, 163, 164, 165, 166, 167, 225.
Sylvester - 274.

Talete di Mileto - 10, 11, 12, 15, 18, 19, 21, 40, 44.
Tartaglia - 153, 154.
Taurinus - 306.
Teeteto - 42.
Teodorico - 130.
Teodoro - 38.
Teodosio - 112.
Teone di Alessandria - 112.
Teone da Smirne - 92.
Tintoretto - 74.
Tiziano - 74, 75.
Tolomeo Filadelfo - 43, 44, 237.
Tolomeo Sotero - 43.
Tommaso d'Aquino - 139, 142, 282, 283,
Tropfke - 124.

Vaihinger - 149.
Varignon - 217, 220, 325.

Vieta - 24, 151, 158, 159, 160, 161.
Vitruvio - 34.
Viviani - 218.

Wagner - 74.
Wallis - 170, 201.
Weierstrass - 234, 273, 321, 328, 330, 336, 348.
Wessel - 295.
Wieleitner - 319.
Witt (Jan de) - 192.
Wordsworth - 324.

Zenone - 35, 36, 37, 38, 39, 46, 55, 100, 140, 195, 220, 281.
Zermelo - 201, 286, 338.
Zeusippo - 65.
Zeuthen - 23, 69, 106, 107, 130, 180.
Zöllner - 334, 335.

INDICE DEL TESTO

7 *Capitolo I* Pitagora
Matematica e scienza

34 *Capitolo II* Euclide
Matematica e filosofia

52 *Capitolo III* Archimede
Matematica e realtà

73 *Capitolo IV* Apollonio da Perga
Matematica e virtuosismo

88 *Capitolo V* Diofanto
La scrittura matematica

111 *Capitolo VI* Al-Kuwarizmi
La matematica come macchina mentale

129 *Capitolo VII* Leonardo da Pisa
Il ridestarsi della matematica

136 *Capitolo VIII* Nicola d'Oresme
Matematica e natura

151 *Capitolo IX* Vieta
Matematica e simbolismo

162 *Capitolo X* Jost Bürgi
La matematica tabellare

172 *Capitolo XI* Descartes
La matematica come metodo

192 *Capitolo XII* Leibniz
L'universo matematico

235 *Capitolo XIII* Poncelet
La matematica come specchio magico

258 *Capitolo XIV* Galois
La matematica come generalizzazione

291 *Capitolo XV* Gauss
Matematica ed esperienza

313 *Capitolo XVI* Riemann
La matematica intesa come mondo dello spirito

332 *Capitolo XVII* Hilbert
Matematica e logica

349 *Bibliografia*

353 *Indice dei nomi*

359 *Indice del testo*

2 6 LUG 2023

QUESTO VOLUME È STATO IMPRESSO
NEL MESE DI APRILE DELL'ANNO MCMLX
NELLE OFFICINE GRAFICHE VERONESI
DELL'EDITORE ARNOLDO MONDADORI

XII.103

STAMPATO IN ITALIA - PRINTED IN ITALY

7268 - BMM

6268

BIBLIOTECA MODERNA MONDADORI

ULTIMI VOLUMI PUBBLICATI

286. G. Carducci - *Odi barbare - Rime e ritmi.*
287. *** - *Zandomeneghi* (a cura di Enrico Piceni).
288. G. Verga - *I Malavoglia.*
289. G. D'Annunzio - *Maia.*
290. A. Panzini - *La lanterna di Diogene.*
291. *** - *Corot* (a cura di Virgilio Gilardoni).
292. Trilussa - *Lupi e agnelli - Le favole - Nove poesie.*
293. Marziale - *Epigrammi.*
294. G. Giacosa - *Novelle e paesi valdostani.*
295-96. G. Gamow - *Uno due tre... Infinito.*
297. *** - *El Greco* (a cura di Guido Ballo).
298. F. Dostoevskij - *L'eterno marito.*
299. G. Pascoli - *Odi e Inni.*
300-3. Tucidide - *La guerra del Peloponneso* (a cura di Luigi Annibaletto).
304-5. G. Verga - *Una peccatrice e altri racconti.*
306. *** - *Borromini* (a cura di G. C. Argan).
307-8. Stendhal - *De l'amour: considerazioni sull'amore.*
309. G. D'Annunzio - *Forse che si forse che no.*
310. *** - *Raffaello* (a cura di Adolfo Venturi).
311. F. Mauriac - *Santa Margherita da Cortona.*
312-15. L. Tolstoi - *Anna Karenina.*
316. G. B. Shaw - *Androclo e il leone.*
317. *** - *Rembrandt* (a cura di Paolo d'Ancona).
318. G. Verga - *Teatro.*
319-20. H. de Balzac - *La cugina Betta.*
321. Yorick - *Viaggio sentimentale.*
322. E. A. Poe - *Lo scarabeo d'oro e altri racconti.*
323-26. Omero - *Iliade.*
327. A. Negri - *Stella mattutina.*
328. *** - *Brueghel* (a cura di Giuseppe Faggin).
329. L. Pirandello - *Il turno.*
330. J. H. Bernardin de Saint-Pierre - *Paolo e Virginia.*
331-34. E. Sienkiewicz - *Quo vadis?*
335. Orazio - *Le satire* (testo latino a fronte).
336. G. Pascoli - *Canti di Castelvecchio.*
337. *** - *Lorenzo Lotto* (a cura di Terisio Pignatti).
338. L. Pirandello - *Liolà - Così è (se vi pare).*
339-40. Plauto - *Il militare borioso - La pignatta.*
341. V. Goethe - *La missione teatrale di Guglielmo Meister.*
342. Voltaire - *Candido e altri racconti.*
343-44. L. Pirandello - *Giustino Roncella nato Boggiòlo.*
345. Trilussa - *I sonetti - Le storie - Giove e le bestie.*
346. G. de Maupassant - *Forte come la morte.*
347. L. Pirandello - *Pensaci, Giacomino! - La ragione degli altri.*
348-51. F. Dostoevskij - *I demoni.*
352. *** - *Bernini* (a cura di Valentino Martinelli).
353-54. J. Gotthelf - *Uli il servo.*
355. L. Pirandello - *La morsa - Lumie di Sicilia - Il dovere del medico.*
356-57. A. Fogazzaro - *Il Santo.*
358-59. A. Oriani - *La disfatta.*
360. *** - *Bosch* (a cura di Gillo Dorfles).
361-62. L. Pirandello - *I vecchi e i giovani.*
363. P. Mérimée - *Colomba - Carmen.*
364-65. P. De Kruif - *Vita fra i dottori.*
366-67. G. D'Annunzio - *Notturno.*
368. W. Shakespeare - *Giulio Cesare.*
369. T. Storm - *Il curatore Carsten e altri racconti.*
370. A. Strindberg - *La camera rossa.*
371. L. Pirandello - *Il berretto a sonagli - La giara - Il piacere dell'onestà.*
372. G. Gentile - *Genesi e struttura della società.*
373. L. Pirandello - *La vita nuda.*
374-75. H. J. C. Grimmelshausen - *L'avventuroso Simplicissimus.*
376-77. A. Oriani - *No.*

378. G. Deledda - *Elias Portolu.*
379. L. Pirandello - *Quaderni di Serafino Gubbio operatore.*
380. A. Panzini - *Santippe.*
381. L. Pirandello - *Ma non è una cosa seria - Il giuoco delle parti.*
382. L. Pirandello - *Scialle nero.*
383. G. Deledda - *Canne al vento.*
384-85. V. Hugo - *I lavoratori del mare.*
386. L. Pirandello - *Uno, nessuno e centomila.*
387. G. Pascoli - *Nuovi poemetti.*
388. *** - *L'arte del vetro* (a cura di Giovanni Mariacher).
389. G. D'Annunzio - *Alcyone.*
390. A. Panzini - *Viaggio di un povero letterato.*
391. A. France - *Gli dèi hanno sete.*
392. Sofocle - *Elettra* (versione di S. Quasimodo).
393. A. Fogazzaro - *Piccolo mondo moderno.*
394-95. A. Dumas - *I tre moschettieri.*
396-97. G. Flaubert - *L'educazione sentimentale.*
398. *** - *L'arte iranica* (a cura di U. Monneret de Villard).
399. G. Deledda - *La madre.*
400. B. Barbarani - *Due Canzonieri.*
401-3. C. Dickens - *Davide Copperfield.*
404. A. Negri - *I canti dell'isola - Vespertina - Il dono - Fons amoris.*
405. L. Pirandello - *L'esclusa.*
406. E. Conze - *Il buddhismo.*
407. L. Pirandello - *Il fu Mattia Pascal.*
408. E. Murger - *Vita di bohème.*
409. *** - *Carpaccio* (a cura di Terisio Pignatti).
410. L. Pirandello - *L'uomo solo.*
411. R. Cantoni - *La vita quotidiana* (Ragguagli dell'epoca).
412. L. Pirandello - *La rallegrata.*
413. G. Giacosa - *Come le foglie.*
414. Giovanni Verga - *Tutte le novelle* - vol. I.
415. *** - *Brunelleschi* (a cura di Giulio Carlo Argan).
416. L. Pirandello - *La mosca.*
417. L. Pirandello - *L'innesto - La patente - L'uomo, la bestia e la virtù.*
418. G. D'Annunzio - *La Nave.*
419-21. Polibio - *Le Storie.*
422. *** - *Rubens* (a cura di Paolo D'Ancona).
423. G. Deledda - *Annalena Bilsini.*
424. G. K. Tallmadge - *Segreti biologici del corpo umano.*
425. *** - *Arte degli etruschi* (a cura di Valeria M. Antonioli).
426. A. Panzini - *Io cerco moglie!*
427. *** - *Giorgione* (a cura di Terisio Pignatti).
428. B. Shaw - *Le quattro commedie gradevoli.*
429. A. Panzini - *Viaggio con la giovane ebrea.*
430. G. Pascoli - *Poemi del Risorgimento.*
431. *** - *Pittura greca* (a cura di Levi e Stenico).
432. A. Panzini - *Il padrone sono me!*
433. *** - *De Nittis* (a cura di Enrico Piceni).
434. L. Tolstoi - *La morte di Ivan Ilijc - La sonata a Kreutzer.*
435. G. Verga - *Tutte le novelle* - vol. II.
436. A. Negri - *Fatalità - Tempeste - Maternità.*
437. E. Zola - *Nanà* - vol. I.
438. E. Zola - *Nanà* - vol. II.
439. G. D'Annunzio - *Trionfo della morte.*
440. G. B. Shaw - *Le tre commedie sgradevoli.*
441. Molière - *Il tartufo - Il malato immaginario.*
442. Fung Yu-lan - *Storia della filosofia cinese.*
443. I. Nievo - *Novelle campagnuole.*
444. W. Disney - *Davy Crockett.*
445. G. Deledda - *La chiesa della solitudine.*
446. B. Shaw - *Tre commedie per puritani.*
447. Erodoto - *Le Storie* - vol. I.
448. Erodoto - *Le Storie* - vol. II.
449. *** - *Delacroix* (a cura di Umberto Apollonio).
450. G. Verga - *Eros.*

★

451. F. Dostoevskij - *Il sosia - Un brutto caso.*
452-53. Max Brod - *Franz Kafka.*
454. B. Shaw - *Il Giudizio Universale - I sei di Calais - La Miliardaria.*

455. S. Kierkegaard - *Aut-Aut.*
456. W. Saroyan - *In bicicletta a Beverly Hills.*
457. G. Gamow - *La creazione dell'universo.*
458. J. K. Jerome - *Tre uomini in una barca.*
459. G. Flaubert - *Tre racconti.*
460-61. A Fogazzaro - *Leila.*
462-65. J.-P. Sartre - *Teatro.*
466. Th. Mann - *La morte a Venezia - Cane e padrone.*
467. W. Shakespeare - *Antonio e Cleopatra.*
468. G. Thomson - *Il futuro prevedibile.*
469-70. D. Defoe - *Fortune e sfortune della famosa Moll Flanders.*
471-72. W. Goethe - *Le affinità elettive.*
473. *** - *Beato Angelico* (a cura di Giovanni Urbani).
474. B. Shaw-*Uomo e Superuomo.*
475. Ch. Morley - *Tuono a sinistra.*
476. L. Stokowski - *La musica per tutti.*
477. L. Smith - *Gli assassini del sogno.*
478. A. Omodeo - *La leggenda di Carlo Alberto.*
479-80. F. Nietzsche - *Così parlò Zaratustra.*
481-82. R. Wagner - *I maestri cantori di Norimberga.*
483. R. Bacchelli - *Una passione coniugale.*
484-85. Thomas Mann - *Altezza Reale.*
486. W. Shakespeare - *Sonetti.*
487. D. H. Lawrence - *Il purosangue.*
488-89. G. Preti - *Storia del pensiero scientifico.*
490-91. F. Dostoevskij - *Umiliati e offesi.*
492. *** - *Piero della Francesca* (a cura di Dino Formaggio).
493-94. G. G. Belli - *Er giorno der Giudizzio e altri 200 sonetti.*
495. G. Lefebvre - *L'Ottantanove.*
496. Sofocle - *Edipo re - Edipo a Colono.*
497. G. D'Annunzio - *Le vergini delle rocce.*
498. C. Pascarella - *Storia nostra.*
499. H. Melville - *Le Encantadas e altri racconti.*
500. G. Leopardi - *Canti.*
501-4. T. Antongini - *Vita segreta di Gabriele d'Annunzio.*
505. B. Shaw - *L'altra isola di John Bull.*
506. M. Nikitin - *Qui visse Dostoevskij.*
507-8. F. Dostoevskij - *I fratelli Karamàzov* - vol. I.
509-10. F. Dostoevskij - *I fratelli Karamàzov* - vol. II.
511-12. F. Dostoevskij - *I fratelli Karamàzov* - vol. III.
513. B. Shaw - *Santa Giovanna.*
514-15. P. Rebora - *Shakespeare.*
516. W. Shakespeare - *Coriolano.*
517. A. Panzini - *Il bacio di Lesbia.*
518. J. Huizinga - *Erasmo.*
519. Sh. Anderson - *Racconti dell'Ohio.*
520-21. *** - *Racconti d'amore* (da "Le mille e una notte").
522. T. B. Macaulay - *La conquista dell'India.*
523-24. H. de Balzac - *La pelle di zigrino.*
525. J. Joyce - *Gente di Dublino.*
526. C. Levi - *Cristo si è fermato a Eboli.*
527-28. R. Bosi - *Dizionario di etnologia.*
529-30. T. Gautier - *Il Capitan Fracassa.*
531-34. R. Bacchelli - *Il mulino del Po* - vol. I.
535-38. R. Bacchelli - *Il mulino del Po* - vol. II.
539-42. R. Bacchelli - *Il mulino del Po* - vol. III.
543. H. Melville - *Benito Cereno.*
544. *** - *Dürer* (a cura di Gillo Dorfles).
545. W. Shakespeare - *La tragedia di Amleto.*
546. J. Conrad - *Racconti di mare e di costa.*
547. B. Shaw - *Il maggiore Barbara.*
548. A. Pusckin - *La figlia del capitano.*
549. R. Schumann - *La musica romantica.*
550. O. Wilde - *De Profundis.*
551-52. M. Bontempelli - *Miracoli.*
553. W. Shakespeare - *Misura per misura.*
554. L. Tolstoi - *Polikusc'ka.*
555-56. F. García Lorca - *Tutto il teatro.*
557-60. L. Tolstoi - *Resurrezione.*
561-62. R. A. Billington - *La conquista del Far West.*
563. K. Schütte - *Il futuro è nello spazio.*

564-65. C. Dickens - *Tempi difficili.*
566-67. M. Grant - *Letteratura romana.*
568. L. Tolstoi - *Sebastopoli.*
569. A. Panzini - *Rose d'ogni mese.*
570-71. F. Kafka - *Diari* - vol. I.
572-73. F. Kafka - *Diari* - vol. II.
574. B. Shaw - *L'imperatore d'America* - *Il decorato O'Flaherty* - *Idillio villereccio.*
575-76. A. Cecov - *Il consigliere segreto e altri racconti.*
577-78. G. Flaubert - *Salambò.*
579. R. Stevenson - *Racconti e favole.*
580-81. G. D'Annunzio - *Le novelle della Pescara.*
582-83. G. D'Annunzio - *L'innocente.*
584-85. F. Dostoevskij - *L'idiota* - vol. I.
586-87. F. Dostoevskij - *L'idiota* - vol. II.
588. W. Shakespeare - *La tempesta.*
589. Eisenstein - *La figura e l'arte di Charlie Chaplin.*
590-91. R. Bacchelli - *Rossini.*
592. E. Momigliano - *Elisabetta d'Inghilterra.*
593-94. Ch. de Laclos - *Amicizie pericolose.*
595. B. Shaw - *Il dilemma del dottore.*
596. *** - *Canaletto* (a cura di Cesare Brandi).
597-98. R. Bacchelli - *Il diavolo al Pontelungo.*
599. F. Schiller - *Scritti storici.*
600-1. I. Turgheniev - *Memorie di un cacciatore.*
602-3. G. Baty e R. Chavance - *Breve storia del teatro.*
604-5. B. Shaw - *Troppo vero per essere bello* - *Sugli scogli.*
606. H. Ibsen - *Casa Rosmer* - *Hedda Gabler* - *Poesie.*
607-8. E. De Marchi - *Demetrio Pianelli.*
609-10. B. Shaw - *Torniamo a Matusalemme.*
611-12. C. Levi - *L'orologio.*
613. V. Pratolini - *Cronache di poveri amanti* - vol. I.
614. V. Pratolini - *Cronache di poveri amanti* - vol. II.
615. S. Freud - *Tre saggi sulla teoria della sessualità.*

26 LUG 2023

BIBLIOTECA MODERNA MONDADORI

Sezioni:

ROMANZI, RACCONTI
colore rosso

ARTI FIGURATIVE
colore verde chiaro

BIOGRAFIE, DOCUMENTI
colore bruno

POESIA
colore azzurro

TEATRO
colore viola

RELIGIONE, FILOSOFIA E PSICOLOGIA
colore blu

CRITICA, SAGGISTICA
colore verde oliva

STORIA, GEOGRAFIA
colore verde scuro

SCIENZA E TECNICA
colore arancio

MANUALI, GUIDE E DIZIONARI
colore oro

•

VOLUME SINGOLO
L. 350
VOLUME DOPPIO
L. 500
VOLUME D'ARTE
L. 500
VOLUME GIGANTE
L. 900

PICCOLA STORIA DELLA MATEMATICA

di Egmont Colerus

A bordo d'un suo tappeto magico, Egmont Colerus ci conduce attraverso il mondo della matematica. Prima tappa è l'egitto dei Faraoni, dove Talete di Mileto c'insegna a calcolare quant'è alta la piramide di Cheope. Poi, seguendo Pitagora di Samo, ci ritroviamo nella dorica Crotone, per accostarci al "miracolo greco", il nascere dell'Occidente alla scienza e allo spirito scientifico. Il nostro viaggio continua: ogni tappa corrisponde a un nome, ogni nome a un aspetto particolare della ricerca scientifica e del suo approfondimento. Così, trascorrendo da Archimede ad al-Khuwarizmi, da Descartes a Leibniz e via via sino a Hilbert (per citare soltanto alcuni dei protagonisti della storia avventurosa), constatiamo che la "rigorosità" della matematica, ideale derivato dall'antichità greca, è un concetto relativo, una condizione determinatasi soltanto con il progredire della scienza. Al termine della prodigiosa escursione, ci attende una certezza: non vi sono limiti "allo sviluppo critico e produttivo della gloriosa e veramente sovrana scienza della matematica".